

Ecuații matriceale

Dacă $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ (mulțimea matricelor pătratice cu n linii și n coloane) și A este inversabilă, atunci:

1. Soluția ecuației $A \cdot X = B$ este $X = A^{-1} \cdot B$
2. Soluția ecuației $X \cdot A = B$ este $X = B \cdot A^{-1}$

Sisteme de ecuații liniare. Forma matriceală

Definiții:

-Un sistem de ecuații liniare este un sistem în care fiecare ecuație are gradul I în raport cu fiecare necunoscută

-Forma unui sistem de ecuații liniare este:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad \text{Forma matriceală este } AX = B, \text{ unde:}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ este Matricea coeficienților sistemului}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ este Matricea termenilor liberi iar } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ este Matricea necunoscutelor}$$

În funcție de **existența soluțiilor** sistemele sunt:

1. **Sisteme compatibile determinate** = sisteme care au soluție unică (1 soluție)
2. **Sisteme compatibile nedeterminate** = sisteme care au mai multe soluții
3. **Sisteme incompatibile** = sisteme care nu au soluții

Sisteme de două ecuații cu două necunoscute. Metoda de rezolvare matriceală

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Se scriu: matricea coeficienților $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, matricea termenilor liberi $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ iar

matricea necunoscutelor $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

forma matriceală a sistemului : $A \cdot X = B$

OBS: dacă matricea A este inversabilă atunci se calculează A^{-1} , și soluția sistemului în acest caz este $X = A^{-1} \cdot B$

Exercițiu model:

Să se scrie în formă matriceală și să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -x + y = 6 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ rezultă } A \cdot X = B$$

Studiem dacă A este inversabilă:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - (-1) \cdot (-1) = 2 - 1 = 1 \neq 0 \text{ rezultă că matricea } A \text{ este inversabilă}$$

Calculăm matricea inversă:

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 1 = 1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (-1) = 1 \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-1) = 1$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 2 = 2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^* \quad A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{(2,2)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}}_{(2,1)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 1 \cdot 6 \\ 1 \cdot 3 + 2 \cdot 6 \end{pmatrix}}_{(2,1)} = \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Temă:

Să se scrie în formă matriceală și să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ -x + 2y = 8 \end{cases}$$

Sisteme de ecuații liniare _ CRAMER

- un sistem de ecuații liniare de tip **CRAMER** este un sistem în care numărul de ecuații este egal cu numărul de necunoscute și **determinantul matricei sistemului este nenul (adică diferit de 0)**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Dacă $d = \det A \neq 0$ se calculează **determinanții asociați necunoscutelor**, adică pentru x_1

calculăm determinantul d_{x_1} , pentru x_2 calculăm determinantul d_{x_2} și așa mai departe.

d_{x_i} este determinantul lui A în care se înlocuiește coloana coeficienților lui x_i cu coloana termenilor liberi.

Apoi se calculează : $x_1 = \frac{d_{x_1}}{d}$; $x_2 = \frac{d_{x_2}}{d}$; ...; $x_n = \frac{d_{x_n}}{d}$

Exercițiu model:

Să se rezolve sistemul:
$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + 2y + 2z = 7 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}$$

Matricea sistemului este: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculăm $d = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

$$d = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 2) - (1 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1) \\ = (2 - 1 + 4) - (4 - 2 + 1) \\ = 5 - 3 \\ = 2 \neq 0$$

Concluzie: **sistemul este Cramer**

$$\text{Calculăm } d_x = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (4 \cdot 2 \cdot 1 + 7 \cdot (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 2) - (1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot 7) \\ = (8 - 7 + 6) - (6 - 8 + 7) = 7 - 5 = 2$$

$$d_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (1 \cdot 7 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 2) - (1 \cdot 7 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 4 \cdot 1) \\ = (7 + 3 + 16) - (14 + 6 + 4) = 26 - 24 = 2$$

$$d_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot 7) - (4 \cdot 2 \cdot 2 + 7 \cdot (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1)$$

$$= (6 - 4 + 14) - (16 - 7 + 3) = 16 - 12 = 4$$

Atunci soluția sistemului este:

$$x = \frac{d_x}{d} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y = \frac{d_y}{d} = \frac{2}{2} = 1$$

$$z = \frac{d_z}{d} = \frac{4}{2} = 2$$

Temă:

1. Rezolvați prin metoda lui Cramer

$$\text{a. } \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 11 \\ 3x - 2y + 3z = 1 \\ 5x + 2y - z = -11 \end{cases} \quad \text{b. } \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 3z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$\text{2. Se consideră sistemul de ecuații: } \begin{cases} x - 2y + 3z = -3 \\ 2x + y + z = 4 \\ mx - y + 4z = m \end{cases}, m \in \mathbb{R}.$$

a. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul să fie de tip Cramer

b. Pentru $m = -5$ să se rezolve sistemul.

$$\text{3. Se consideră sistemul de ecuații: } \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + y - z = 3 \\ x - y + 2z = a \end{cases}, a \in \mathbb{R}.$$

a. Pentru $a = 0$ să se rezolve sistemul.

b. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât soluția sistemului să verifice relația: $x = y + z$.

Metoda lui GAUSS

Metoda lui Gauss constă în aducerea sistemelor de ecuații liniare la o formă triunghiulară sau trapezoidală prin eliminarea (reducerea) succesivă a necunoscutelor.

Exerciții model:

1.
$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \text{ reducem necunoscuta } x \text{ din a doua ecuație}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \xrightarrow{(-2)} \begin{cases} x + 2y = 3 \\ -3y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

OBS. ecuația pe care o înmulțim și o adunăm la altă ecuație, rămâne neschimbată.

2.
$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases} \text{ reducem pe } x \text{ apoi pe } y$$

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases} \xrightarrow{(-1) \cdot (-2)} \begin{cases} x + y + z = 3 \\ y - 2z = -1 \\ -y - z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 3 \\ y - 2z = -1 \\ -3y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 3 \\ y - 2z = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Înlocuim pe $y = 1$ în a doua ecuație și rezultă că $z = 1$ și apoi din prima ecuație $x + 1 + 1 = 3 \Rightarrow x = 1$.

Temă: Să se rezolve prin metoda lui Gauss sistemele de ecuații:

a. $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases}$; b. $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + y + 2z = 4 \\ 2x - y + 3z = 4 \end{cases}$ c. $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 3y - z = 4 \end{cases}$; d. $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y - z = 2 \\ x - y - z = -1 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases}$