

Clasa a X-a M2

Profesor: Cornelia Mestecan

Fișă de lucru - Proprietăți ale funcțiilor (recapitulare și completări)

BREVIAR TEORETIC

Fie mulțimile $A, B \subset \mathbb{R}$ și o funcție $f : A \rightarrow B$.

Def. Funcția f este **injectivă** dacă $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$ avem $f(x_1) \neq f(x_2)$

Modalități practice de a arăta că o funcție este injectivă:

- f este injectivă dacă $\forall x_1, x_2 \in A$, cu $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
- Funcția numerică $f : A \rightarrow B$ este injectivă dacă orice paralelă dusă la axa Ox prin punctele codomeniului, intersecționează graficul funcției în cel mult un punct.

Def. Funcția f este **surjectivă** dacă $\forall y \in B, \exists x \in A$ astfel încât $y = f(x)$

Modalități practice de a arăta că o funcție este surjectivă:

- Funcția $f : A \rightarrow B$ este surjectivă dacă $f(A) = B$
- Funcția numerică $f : A \rightarrow B$ este surjectivă dacă orice paralelă dusă la axa Ox prin punctele codomeniului, intersecționează graficul funcției în cel puțin un punct.

Def. Funcția f este **bijectivă** dacă f este injectivă și surjectivă.

Funcția numerică $f : A \rightarrow B$ este surjectivă dacă orice paralelă dusă la axa Ox prin punctele codomeniului, intersecționează graficul funcției în exact un punct.

Compunerea funcțiilor

Fie $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$. Funcția $g \circ f : A \rightarrow C$ definită prin $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ se numește *compusa lui g cu f* .

Funcția inversabilă

Def. Funcția f este inversabilă dacă există funcția $g : B \rightarrow A$ cu $g \circ f = 1_A$ și $f \circ g = 1_B$. Funcția g se numește **inversa funcției f** și se notează cu f^{-1} .

- f este inversabilă dacă și numai dacă f este bijectivă.**

Exercițiu rezolvat:

Să se verifice proprietățile (injectivitate, surjectivitate, bijectivitate, inversabilitate) funcției

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x - 5.$$

Rezolvare: f este injectivă dacă $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, cu $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, cu $f(x_1) = f(x_2)$, adică $3x_1 - 5 = 3x_2 - 5 \Leftrightarrow 3x_1 = 3x_2 : 3 \Rightarrow x_1 = x_2$, cum x_1, x_2 au fost arbitrar alese, rezultă că f este injectivă;

f este surjectivă dacă $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}$, astfel încât $y = f(x)$

fie $y \in \mathbb{R}, y = f(x) \Leftrightarrow y = 3x - 5 \Rightarrow 3x = y + 5 : 3 \Rightarrow x = \frac{y}{3} + \frac{5}{3} \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$ deci f este surjectivă;

f este bijectivă dacă este injectivă și surjectivă

în cazul nostru, cum funcția f este injectivă și surjectivă, rezultă că este bijectivă.

orice funcție bijectivă este și inversabilă,

prin urmare funcția noastră este și inversabilă, putem afla funcția inversă

$$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = y, f^{-1}(y) = x$$

$3x - 5 = y \Rightarrow x = \frac{y}{3} + \frac{5}{3}$ deci $f^{-1}(y) = \frac{y}{3} + \frac{5}{3}$ sau dacă schimbăm variabila $f^{-1}(x) = \frac{x}{3} + \frac{5}{3}$ este funcția inversă.

Exerciții propuse:

Verificați proprietățile de injectivitate, surjectivitate, bijectivitate, inversabilitate ale funcțiilor:

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 8$

Clasa a X-a M2

Profesor: Cornelia Mestecan

Fișă de lucru - Proprietăți ale funcțiilor (recapitulare și completări)

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -6x + 2$

c) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = x - 4$

Exercițiu rezolvat:

Să se arate că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x^2 - 5x + 2$ nu este injectivă, surjectivă, bijectivă, inversabilă.

Rezolvare: **f este injectivă dacă** $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \text{ cu } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

f nu este injectivă dacă $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ cu } x_1 \neq x_2 \text{ pentru care } f(x_1) = f(x_2)$

-observăm că $f(x) = x(3x - 5) + 2$ și că pentru $x_1 = 0 \Rightarrow f(x_1) = 2$ și pentru $x_2 = \frac{5}{3} \Rightarrow f(x_2) = 2$ deci

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ prin urmare **f nu este injectivă**

f este surjectivă dacă $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, \text{ astfel încât } y = f(x)$

f nu este surjectivă dacă găsim un $y \in \mathbb{R}$ pentru care **nu există** $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $y = f(x)$

-observăm că $V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ vârful parabolei este punct de minim pentru că $a=3>0$ și

$$y_{\min} = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(25-24)}{12} = -\frac{1}{12}$$

Dacă luăm $y = -2 < y_{\min}$, din $y = f(x)$ rezultă $-2 = 3x^2 - 5x + 2 \Leftrightarrow 3x^2 - 5x + 4 = 0$

$\Delta = 25 - 48 = -23 < 0$ nu există $x \in \mathbb{R}$ pentru care $f(x) = y$ deci **f nu este surjectivă**.

Nefiind injectivă, surjectivă rezultă că **f nu este bijectivă** deci nu este nici inversabilă.

Exerciții propuse:

1. Arătați că următoarele funcții nu sunt injective :

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + x$

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 4x - 6$

2. Arătați că următoarele funcții nu sunt surjective :

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + x$

b) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = 5x + 3$

3. Arătați că următoarele funcții sunt bijective și inversabile. Determinați funcțiile inverse.

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x - 1$

b) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = -x + 3$