

Fișă de lucru: Funcții injective, surjective, bijective

1.Exercițiu model:

Să se verifice proprietățile de injectivitate, surjectivitate, bijectivitate ale funcției

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x - 5.$$

Rezolvare: **f este injectivă** dacă $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, **cu** $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, cu $f(x_1) = f(x_2)$, adică $3x_1 - 5 = 3x_2 - 5 \Leftrightarrow 3x_1 = 3x_2 : 3 \Rightarrow x_1 = x_2$, cum x_1, x_2 au fost arbitrar alese, rezultă că **f este injectivă**

f este surjectivă dacă $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = y$

Din egalitatea $f(x) = y$, rezultă că $3x - 5 = y$ din care se obține $x = \frac{y+5}{3} \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$, prin urmare

funcția f este surjectivă

Din faptul că funcția f este injectivă și surjectivă rezultă că **funcția f este bijectivă**.

2.Exerciții propuse:

Verificați proprietățile de injectivitate, surjectivitate, bijectivitate ale funcțiilor:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 8$; b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -6x + 2$; c) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = x - 4$;

d) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = -x + 3$

3.Exercițiu model: Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x^2 - 5x + 2$.

a) Să se arate că funcția f nu este injectivă;

b) Să se studieze surjectivitatea funcției f .

Rezolvare:

a) **f este injectivă** dacă $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, **cu** $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

f nu este injectivă dacă $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ **cu** $x_1 \neq x_2$ **pentru care** $f(x_1) = f(x_2)$

-observăm că $f(x) = x(3x - 5) + 2$ și că pentru $x_1 = 0 \Rightarrow f(x_1) = 2$ și pentru $x_2 = \frac{5}{3} \Rightarrow f(x_2) = 2$ deci

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ prin urmare **f nu este injectivă**

b) **f este surjectivă** dacă $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = y$

Din egalitatea $f(x) = y$, rezultă că $3x^2 - 5x + 2 = y$ din care se obține

$$3x^2 - 5x + 2 - y = 0$$

$$\begin{array}{l|l} a = 3 & \Delta = 25 - 24 + 12y \\ b = -5 & \Delta = b^2 - 4ac \Leftrightarrow \Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (2 - y) \\ c = 2 - y & \Delta = 1 + 12y \geq 0 \Rightarrow y \geq -\frac{1}{12} \end{array}$$

Deci dacă $y \geq -\frac{1}{12}$ exista $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = y$ iar pentru $y < -\frac{1}{12}$ nu exista $x \in \mathbb{R}$ astfel încât

$f(x) = y$, prin urmare **funcția f nu este surjectivă pe $\mathbb{R}$** .

4.Exerciții propuse:

Arătați că următoarele funcții nu sunt injective și nici surjective:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + x$; b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 4x - 6$

5.Exercițiu model: Fie funcția $f: \left(\frac{5}{4}, +\infty\right) \rightarrow \left(-\frac{9}{8}, +\infty\right), f(x) = 2x^2 - 5x + 2$.

Să se arate că funcția este bijectivă.

Rezolvare: **f este injectivă** dacă $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \text{ cu } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 2x_1^2 - 5x_1 + 2 = 2x_2^2 - 5x_2 + 2 \Leftrightarrow 2(x_1^2 - x_2^2) - 5(x_1 - x_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - 5(x_1 - x_2) = 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2) \underbrace{\left[2 \underbrace{(x_1 + x_2)}_{> \frac{5}{2}} - 5 \right]}_{> 0} = 0$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Prin urmare funcția **f este injectivă (1).**

f este surjectivă dacă $\forall y \in \left(-\frac{9}{8}, +\infty\right), \exists x \in \left(\frac{5}{4}, +\infty\right)$ astfel încât $f(x) = y$

Din egalitatea $f(x) = y$, rezultă că $2x^2 - 5x + 2 = y$ din care se obține

$$2x^2 - 5x + 2 - y = 0$$

$$\begin{array}{l} a = 2 \\ b = -5 \\ c = 2 - y \end{array} \left| \begin{array}{l} \Delta = 25 - 16 + 8y \\ \Delta = b^2 - 4ac \Leftrightarrow \Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (2 - y) \\ \Delta = 9 + 8y \geq 0 \Rightarrow y \geq -\frac{9}{8} \end{array} \right.$$

Deci dacă $y > -\frac{9}{8}$, $\Delta > 0$ și se pot calcula soluții $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$,

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{\Delta}}{4} = \frac{5}{4} - \frac{\sqrt{\Delta}}{4} < \frac{5}{4} \Rightarrow x_1 \notin \left(\frac{5}{4}, +\infty\right), x_2 = \frac{5 + \sqrt{\Delta}}{4} = \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{\Delta}}{4} > \frac{5}{4} \Rightarrow x_2 \in \left(\frac{5}{4}, +\infty\right) \text{ adică}$$

există $x \in \left(\frac{5}{4}, +\infty\right)$ astfel încât $f(x) = y$, prin urmare funcția **f este surjectivă (2).**

Din (1) și (2) rezultă că funcția **f este bijectivă.**

6.Exerciții propuse:

Arătați că următoarele funcții sunt bijective :

a) $f: \left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \rightarrow \left(-\frac{1}{4}, +\infty\right), f(x) = x^2 - x$,

b) $f: \left(\frac{1}{3}, +\infty\right) \rightarrow \left(-\infty, \frac{4}{3}\right), f(x) = -3x^2 + 2x + 1$