

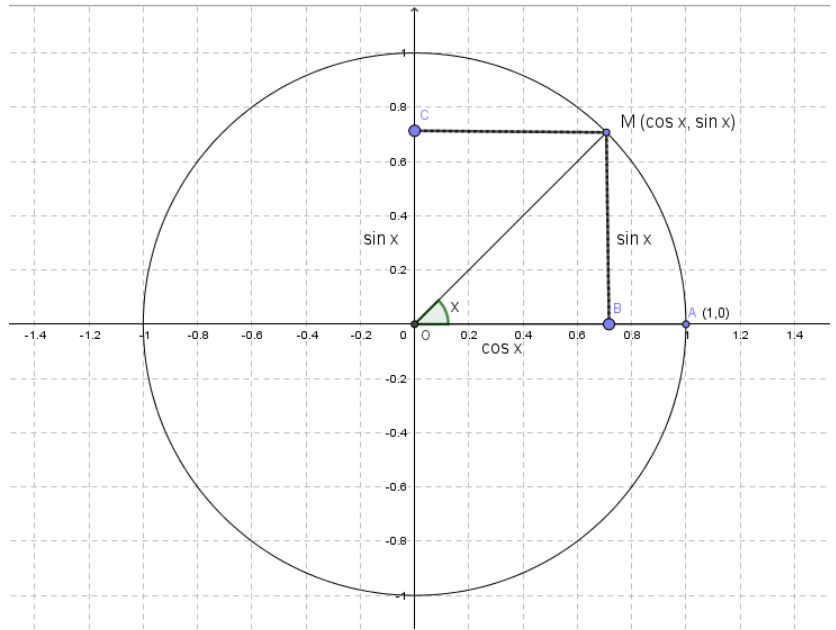
Funcții trigonometrice

Ne reamintim !!!

Cercul trigonometric

$C(O;1)$ - cercul de centru O și raza 1

$x = \text{măs } \angle(OM; OX)$



Măsurile unghiurilor se exprimă cu ajutorul gradelor sexagesimale și a radianilor

Măsura în radiani a unui unghi $= l = \frac{\pi \cdot \alpha^\circ}{180^\circ}$, unde α° este măsura în grade a celui unghi

Grade sexagesimale	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Radiani	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Definiții

Funcția sinus $\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1;1]$, $\sin x = \text{ordonata lui } M$	Funcția cosinus $\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1;1]$, $\cos x = \text{abscisa lui } M$
Funcția tangentă $tg : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$, $tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$	Funcția cotangentă $ctg : \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$, $ctgx = \frac{\cos x}{\sin x}$

Proprietăți

P1. Funcțiile sinus și cosinus sunt periodice cu perioada principală $T = 2\pi$

adică $\sin(x + 2k\pi) = \sin x, k \in \mathbb{Z}$ și $\cos(x + 2k\pi) = \cos x, k \in \mathbb{Z}$

P2. Funcțiile tangentă și cotangentă sunt periodice cu perioada principală $T = \pi$

adică $tg(x + k\pi) = tgx, k \in \mathbb{Z}$ și $ctg(x + k\pi) = ctgx, k \in \mathbb{Z}$

P3. Funcțiile sinus, tangentă și cotangentă sunt funcții impare, iar funcția cosinus este funcția pară:

$$\boxed{\sin(-x) = -\sin x, x \in \mathbb{R}}, \quad \boxed{tg(-x) = -tgx, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}}, \quad \boxed{ctg(-x) = -ctgx, x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}},$$

$$\boxed{\cos(-x) = \cos x, x \in \mathbb{R}}$$

Vă reamintim că:

Dacă studiem pozițiile punctului M pe cercul trigonometric constatăm :

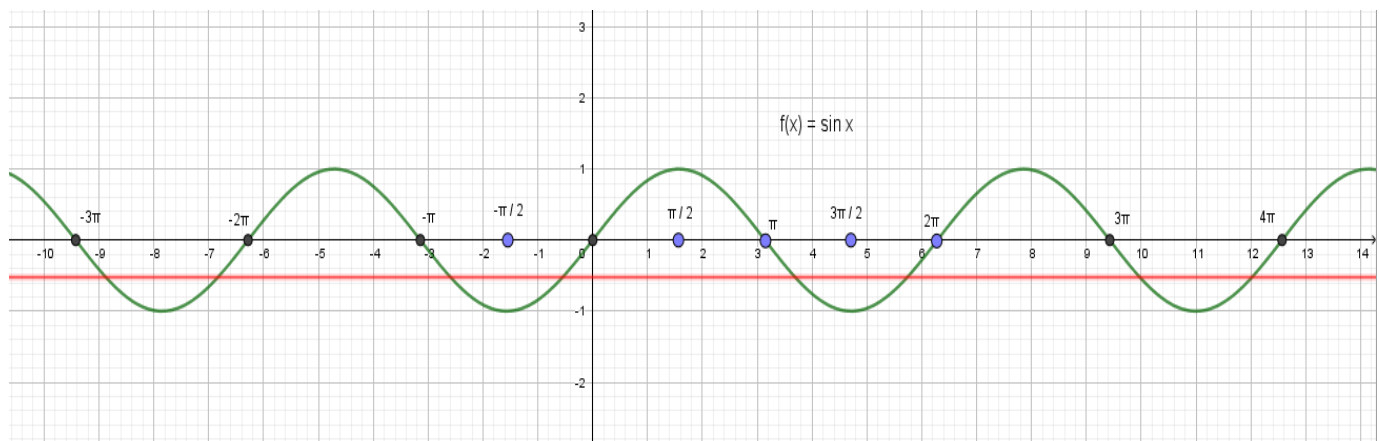
	Cadrantul I $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$	Cadrantul II $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$	Cadrantul III $x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$	Cadrantul IV $x \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$
sin	+	+	−	−
cos	+	−	−	+
tg	+	−	+	−
ctg	+	−	+	−

Reprezentarea grafică a funcțiilor trigonometrice

1) Funcția **sinus**: $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1; 1], f(x) = \sin x$

folosim faptul că funcția este periodică cu perioada principală $T = 2\pi$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0



Tema 1

Desenați graficul funcției în sistemul cartezian XOY, apoi studiați graficul funcției și stabiliți:

- Pe ce intervale este funcția strict crescătoare? $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$
- Pe ce intervale este funcția strict descrescătoare? $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$
- Pe ce intervale este funcția convexă / concavă?
Convexă pe $[\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi], k \in \mathbb{Z}$
Concavă pe $[0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi], k \in \mathbb{Z}$

- 4) Pe ce interval este funcția bijectivă? Funcția este bijectivă pe $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ este și inversabilă, deci există funcția inversă, pe mulțimea numerelor reale nu este bijectivă

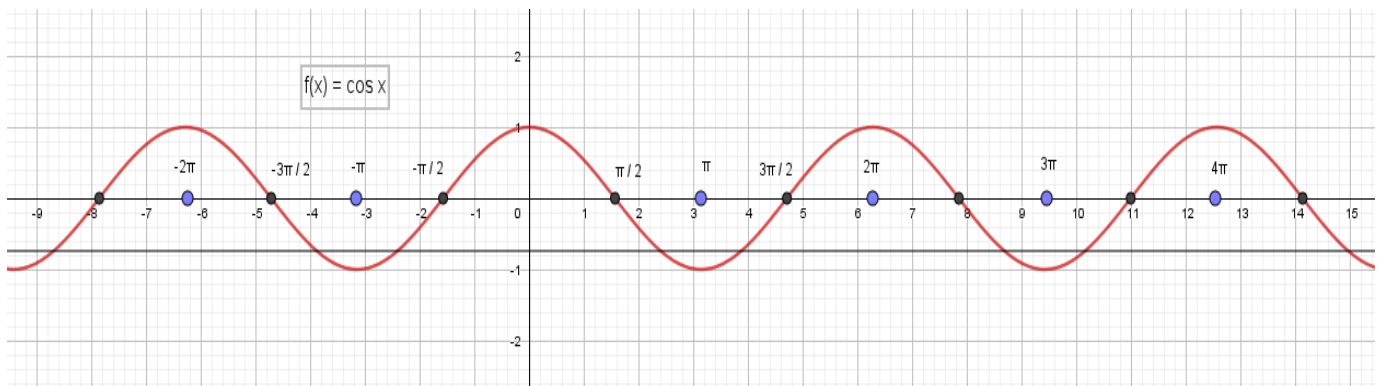
Concluzie: $f : \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1; 1], f(x) = \sin x$ este inversabilă

și funcția inversă este $f^{-1} : [-1; 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], f^{-1}(x) = \arcsin x$

2. Funcția **cosinus**: $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1; 1], f(x) = \cos x$

folosim faptul că funcția este periodică cu perioada principală $T = 2\pi$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
COS x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1



Tema 2

Desenați graficul funcției în sistemul cartezian XOY, apoi studiați graficul funcției și stabiliți:

1. Desenați graficul funcției cosinus după modelul funcției sinus

2. Pe ce intervale este funcția strict crescătoare? $[\pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi], k \in \mathbb{Z}$

3. Pe ce intervale este funcția strict descrescătoare? $[0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi], k \in \mathbb{Z}$

4. Pe ce intervale este funcția convexă / concavă?

Convexă pe $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$. Concavă pe $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$

5. Pe ce interval este funcția bijectivă? Funcția este bijectivă pe intervalul $[0; \pi]$ iar pe mulțimea numerelor reale nu este bijectivă. Funcția este și inversabilă, deci există funcția inversă

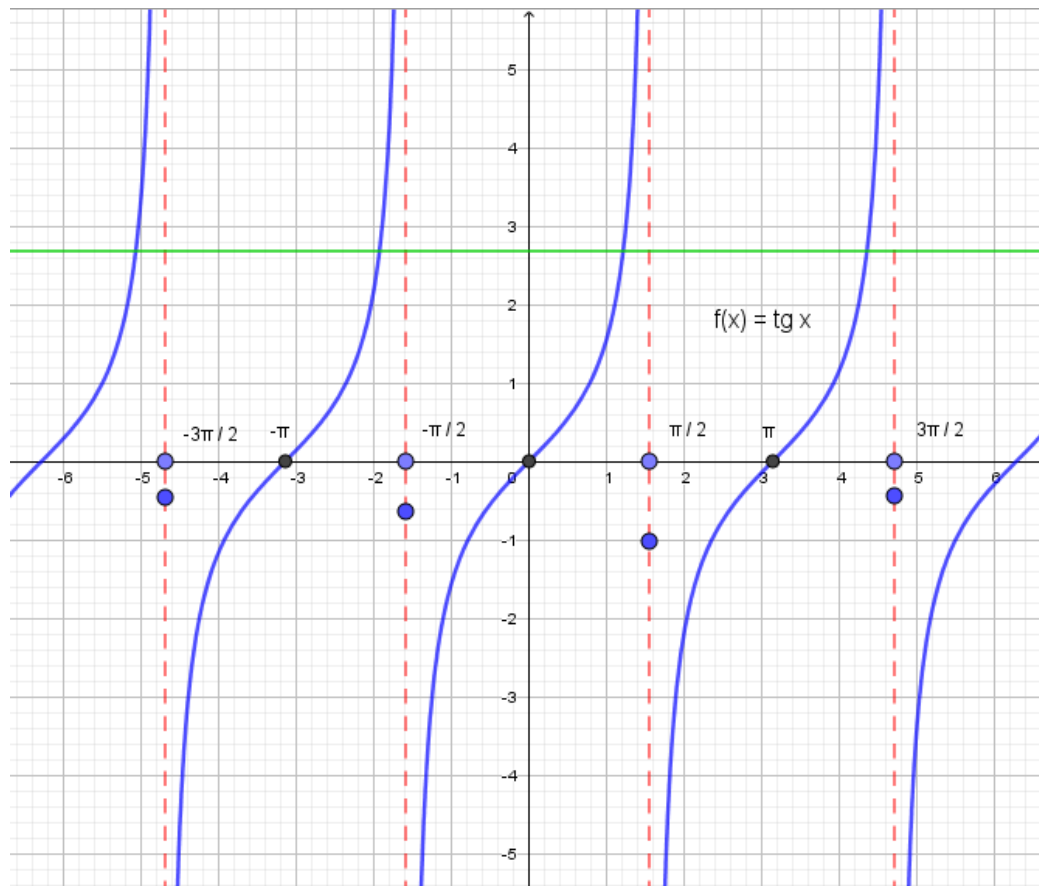
Concluzie: funcția $f : [0; \pi] \rightarrow [-1; 1], f(x) = \cos x$ este inversabilă și funcția inversă este

$f^{-1} : [-1; 1] \rightarrow [0; \pi], f^{-1}(x) = \arccos x$

3. Funcția **tangentă**, $f : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$

folosim faptul că funcția este periodică cu perioada principală $T = \pi$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
tg x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	/	0	/	0



Tema 3

Desenați graficul funcției în sistemul cartezian XOY, apoi studiați graficul funcției și stabiliți:

1. Monotonia funcției?

2. Pe ce intervale este funcția convexă / concavă?

.....

3. Pe ce interval este funcția bijectivă?

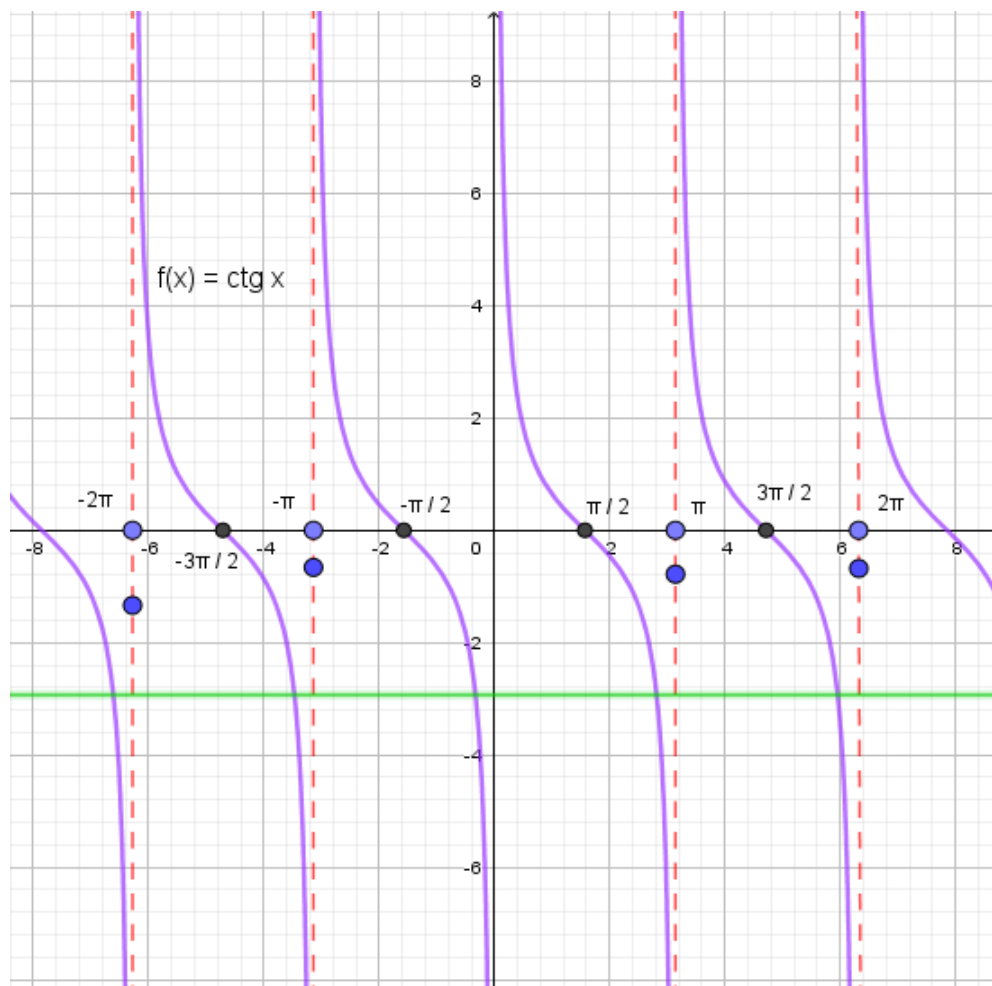
Concluzie: funcția $f : \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$ este inversabilă și funcția inversă este

$$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right), f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$$

4. Funcția **cotangentă**: $f : \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{ctgx}$

folosim faptul că funcția este periodică cu perioada principală $T = \pi$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ctg x	/	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	/	0	/



Tema 4

Desenați graficul funcției în sistemul cartezian XOY, apoi studiați graficul funcției și stabiliți:

1. Monotonia funcției:

2. Pe ce intervale este funcția convexă / concavă?

.....

3. Pe ce interval este funcția bijectivă?

Concluzie: funcția $f : (0; \pi) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{ctgx}$ este inversabilă și funcția inversă este

$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (0; \pi), f^{-1}(x) = \operatorname{arccctgx}$