

FIȘĂ _RECAPITULARE NOȚIUNI TEORETICE

Clasa a XI-a _Algebra

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat, M_pedagogic)

Noțiuni teoretice_recapitulare_Matrice

1. Fie mulțimea $I_{mn} = \{(i, j) / 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\}$. O funcție $A: I_{mn} \rightarrow K$ (K fiind una din mulțimile

$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$) se numește matrice de tipul (m, n) . Valorile $A(i, j)$ se notează a_{ij} și se numesc elementele matricei. Numărul i se numește indice de linie, iar j se numește indice de coloană.

Matricea A se scrie sub forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ adică un tablou cu } m \text{ linii și } n \text{ coloane.}$$

Notăție prescurtată $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$

Notăm cu $M_{mn}(K) = \text{mulțimea matricelor de tipul } (m, n) \text{ cu elemente în } K$ și cu $M_n(K) = \text{mulțimea matricelor pătratice de ordinul } n \text{ cu elemente în } K$.

2. Matricea pătratică, în care pe diagonala principală este 1 ($a_{ii} = 1, i = 1, 2, 3, \dots, n$) și în rest este 0, se numește *matricea unitate de ordinul n* și se notează cu I_n .

3. Fie $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{mn}(K)$. Matricea ${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{mn}(K)$, se numește *transpusa*

matricei A . (Se observă că transpusa se obține prin schimbarea liniilor în coloane sau a coloanelor în linii).

4. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{mn}(K)$, numim *opusa matricei A* ,

$$\text{matricea } -A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & & & \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix}.$$

FIȘĂ _RECAPITULARE NOȚIUNI TEORETICE

Clasa a XI-a _Algebra

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat, M_pedagogic)

Noțiuni teoretice _recapitulare_Determinanți

-Dacă $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ atunci sistemul ordonat de numere $\{a_{11}; a_{22}\}$ formează diagonala

principală, iar sistemul ordonat de numere $\{a_{12}; a_{21}\}$ formează diagonala secundară.

-Dacă $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ atunci sistemul ordonat de numere $\{a_{11}; a_{22}; a_{33}\}$ formează diagonala

principală, iar sistemul ordonat de numere $\{a_{13}; a_{22}; a_{31}\}$ formează diagonala secundară.

1. Dacă $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ atunci numărul $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ se numește

determinantul de ordinul 2

(adică **Regula:** determinantul de ordinul 2 este = produsul elementelor de pe diagonala principală – produsul elementelor de pe diagonala secundară)

Determinantul de ordinul 3 se calculează prin 2 metode:

I. regula lui Sarrus

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21})$$

Regula lui Sarrus:

-imediat sub determinant, se copiază linia 1 și linia 2 (fără a prelungi determinantul)

-**determinantul de ordinul 3** = suma produselor elementelor de pe diagonalele principale – suma produselor elementelor de pe diagonalele secundare

II. regula triunghiului

-**determinantul de ordinul 3** = (suma dintre produsul elementelor de pe diagonala principală și produsele elementelor de pe triunghiurile cu laturi paralele cu diagonala principală) – (suma dintre produsul elementelor de pe diagonala secundară și produsele elementelor de pe triunghiurile cu laturi paralele cu diagonala secundară)

FIȘĂ _RECAPITULARE NOȚIUNI TEORETICE

Clasa a XI-a _Algebra

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat, M_pedagogic)

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21})$$

Noțiuni teoretice _recapitulare_Matrice inversabilă

- Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$. Matricea A se numește matrice inversabilă dacă există $B \in M_n(\mathbb{C})$, astfel încât $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. Matricea B se numește inversa matricei A și se notează A^{-1} .
- O matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ este inversabilă dacă și numai dacă $\det(A) \neq 0$
- Calculul matricei inverse:
 - Se calculează $\det(A)$. Dacă $\det(A) \neq 0$ atunci A este inversabilă și mergem în etapa următoare. Dacă $\det(A) = 0$ atunci A nu este inversabilă și ne oprim.
 - Se determină matricea transpusă A^t .
 - Se determină matricea adjunctă A^* ale cărei elemente sunt complementii algebrici al elementelor matricei transpuse A^t . Complementul algebric al elementului a_{ij} este $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot d_{ij}$, unde d_{ij} este determinantul care se obține din $\det(A^t)$ prin eliminarea liniei i și coloanei j și se numește *minorul* elementului a_{ij} .
 - Se calculează matricea inversă cu formula $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^*$
- Dacă A și B sunt inversabile atunci au loc relațiile: a) $(A^{-1})^{-1} = A$; b) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Ecuatii matriceale

Dacă $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ (mulțimea matricelor pătratice cu n linii și n coloane) și A este inversabilă, atunci:

1. Soluția ecuației $A \cdot X = B$ este $X = A^{-1} \cdot B$
2. Soluția ecuației $X \cdot A = B$ este $X = B \cdot A^{-1}$

FIȘĂ _RECAPITULARE NOȚIUNI TEORETICE

Clasa a XI-a _Algebra

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat, M_pedagogic)

Noțiuni teoretice _recapitulare_Sisteme de ecuații

Sisteme de ecuații liniare. Forma matriceală

Definiții:

-Un sistem de ecuații liniare este un sistem în care fiecare ecuație are gradul I în raport cu fiecare necunoscută

-Forma unui sistem de ecuații liniare este:

$$(1) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \text{Forma matriceală este } AX = B, \text{ unde:}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ este Matricea coeficienților sistemului}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ este Matricea termenilor liberi iar } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ este Matricea necunoscutelor}$$

Dacă toți termenii liberi sunt nuli, sistemul (1) se numește **sistem omogen**.

În funcție de **existența soluțiilor** sistemele sunt:

1. **Sisteme compatibile determinate** = sisteme care au soluție unică (1 soluție)
2. **Sisteme compatibile nedeterminate** = sisteme care au mai multe soluții
3. **Sisteme incompatibile** = sisteme care nu au soluții

Orice sistem omogen de ecuații liniare este compatibil. O soluție a acestuia este $(0, 0, 0, \dots, 0)$ numită **soluția banală**.

Rangul unei matrice

Fie $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ o matrice cu m linii și n coloane și r un număr natural a. î. $1 \leq r \leq \min(m, n)$

Determinantul format din r linii și r coloane alese din matricea A, se numește minor de ordinul r

FIȘĂ _RECAPITULARE NOȚIUNI TEORETICE

Clasa a XI-a _Algebra

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat, M_pedagogic)

Def. Matricea nenulă $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ are rangul r , dacă matricea are un minor nenul de ordinul r și toți minorii de rang superior (dacă există) sunt nuli. Scriem $r = \text{rang} A$.

Teoremă. Fie $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, $A \neq O_{m,n}$ o matrice și $r \in \mathbb{N}^*$. Rangul matricei A este egal cu r dacă și numai dacă există un minor de ordinul r al matricei A , nenul, iar toți minorii de rang $r + 1$ (atunci când există) să fie nuli.

Matricea extinsă este $\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$

Teorema lui Kronecker – Capelli : Un sistem de ecuații liniare este compatibil dacă și numai dacă rangul matricei A este egal cu rangul matricei extinse $\overline{A}$.

Metode de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare

Rezolvare matriceală a sistemelor

Un sistem de forma
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$
 se scrie sub formă matriceală $AX = B$.

Dacă matricea A este inversabilă, atunci $X = A^{-1} \cdot B$

Exemplu de exercițiu rezolvat prin metoda matriceală:

Să se scrie în formă matriceală și să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -x + y = 6 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ rezultă } A \cdot X = B$$

Studiem dacă A este inversabilă:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - (-1) \cdot (-1) = 2 - 1 = 1 \neq 0 \text{ rezultă că matricea } A \text{ este inversabilă}$$

Calculăm matricea inversă:

FIȘĂ _RECAPITULARE NOȚIUNI TEORETICE

Clasa a XI-a _Algebra

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat, M_pedagogic)

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 1 = 1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (-1) = 1 \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-1) = 1$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 2 = 2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^* \quad A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{(2,2)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}}_{(2,1)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 1 \cdot 6 \\ 1 \cdot 3 + 2 \cdot 6 \end{pmatrix}}_{(2,1)} = \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Rezolvarea sistemelor de ecuații liniare prin metoda lui CRAMER

- un sistem de ecuații liniare de tip **CRAMER** este un sistem în care numărul de ecuații este egal cu numărul de necunoscute și **determinantul matricei sistemului este nenul (adică diferit de 0)**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad \text{Matricea sistemului este } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Dacă $d = \det A \neq 0$ se calculează **determinanții asociați necunoscutelor**, adică pentru x_1 calculăm determinantul d_{x_1} , pentru x_2 calculăm determinantul d_{x_2} și așa mai departe.

d_{x_i} este determinantul lui A în care se înlocuiește coloana coeficienților lui x_i cu coloana termenilor liberi.

$$\text{Apoi se calculează : } x_1 = \frac{d_{x_1}}{d}; x_2 = \frac{d_{x_2}}{d}; \dots; x_n = \frac{d_{x_n}}{d}$$

Exemplu de exercițiu rezolvat prin metoda lui Cramer:

FIȘĂ _RECAPITULARE NOȚIUNI TEORETICE

Clasa a XI-a _Algebra

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat, M_pedagogic)

Să se rezolve sistemul:
$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + 2y + 2z = 7 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}$$

Matricea sistemului este: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculăm

$$d = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 2) - (1 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1)$$

$$d = \det A = (2 - 1 + 4) - (4 - 2 + 1) \\ = 5 - 3 = 2 \neq 0$$

Concluzie: **sistemul este de tip Cramer**

Calculăm $d_x = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (4 \cdot 2 \cdot 1 + 7 \cdot (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 2) - (1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot 7)$

$$= (8 - 7 + 6) - (6 - 8 + 7) = 7 - 5 = 2$$

$$d_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (1 \cdot 7 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 2) - (1 \cdot 7 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 4 \cdot 1)$$
$$= (7 + 3 + 16) - (14 + 6 + 4) = 26 - 24 = 2$$

$$d_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot 7) - (4 \cdot 2 \cdot 2 + 7 \cdot (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1)$$
$$= (6 - 4 + 14) - (16 - 7 + 3) = 16 - 12 = 4$$

Atunci soluția sistemului este:

$$x = \frac{d_x}{d} = \frac{2}{2} = 1, y = \frac{d_y}{d} = \frac{2}{2} = 1, z = \frac{d_z}{d} = \frac{4}{2} = 2$$

FIȘĂ _RECAPITULARE NOȚIUNI TEORETICE

Clasa a XI-a _Algebra

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat, M_pedagogic)

Rezolvarea sistemelor de ecuații liniare prin metoda lui Gauss

Metoda lui Gauss dă posibilitatea rezolvării unui sistem compatibil determinat dar și a celui compatibil nedeterminat.

- ✓ Două sisteme de ecuații de ecuații sunt **echivalente** dacă au aceeași mulțime a soluțiilor.
- ✓ Dacă într-un sistem de ecuații liniare se permută două ecuații între ele, sistemul obținut este echivalent cu cel inițial. Această transformare a sistemului se numește transformare de tipul I.
- ✓ Dacă într-un sistem de ecuații liniare se adună membru cu membru o ecuație cu altă ecuație înmulțită eventual cu un număr nenul, noul sistem este echivalent cu cel inițial. Această transformare a sistemului se numește transformare de tipul II.
- ✓ Metoda lui Gauss constă în aplicarea asupra sistemului inițial, a unui șir de transformări de tipul I sau II, astfel încât după un număr de pași eliminând câte o necunoscută sistemul să fie adus la o formă triunghiulară sau trapezoidală.
- ✓ Sistemul de ecuații inițial este incompatibil dacă în sistemul obținut sunt ecuații de forma $0 = c_k$

Exemplu de exercițiu rezolvat prin metoda lui Gauss

$$1. \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases} \text{ reducem pe } x \text{ apoi pe } y$$
$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} (-1) \cdot (-2) \\ \checkmark \end{matrix}} \begin{cases} x + y + z = 3 \\ y - 2z = -1 \\ -y - z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 3 \\ y - 2z = -1 \\ -3y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 3 \\ y - 2z = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Înlocuim pe $y = 1$ în a doua ecuație și rezultă că $z = 1$ și apoi din prima ecuație $x + 1 + 1 = 3 \Rightarrow x = 1$.

Noțiuni teoretice _recapitulare _Aplicații ale determinantilor în geometria analitică plană

-**ecuația generală** este $d: ax + by + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ sau $b \neq 0$ care poate fi scrisă și $d: y = mx + n$, unde m este panta dreptei.

-ecuația dreptei determinată de punctele $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ poate fi scrisă cu determinat:

$$AB: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

FIȘĂ _RECAPITULARE NOȚIUNI TEORETICE

Clasa a XI-a _Algebra

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat, M_pedagogic)

-distanța de la un punct $M_0(x_0, y_0)$ la dreapta $d: ax + by + c = 0$, este $d(M_0, d) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

-condiția ca trei puncte $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B), C(x_C; y_C)$ să fie **coliniare** este:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{adică } C \in AB)$$

- aria triunghiului ABC , unde $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B), C(x_C; y_C)$, este

$$A_{(ABC)} = \frac{1}{2} \cdot |\Delta| \quad \text{unde} \quad \Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Noțiuni teoretice _recapitulare _Aplicații ale determinanților în geometria analitică în spațiu

-ecuația generală a planului este $\pi: ax + by + cz + d = 0$

-ecuația planului determinat de punctele necoliniare $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3)$ poate fi scrisă cu determinat:

$$\pi: \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

- patru puncte $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3), D(x_4, y_4, z_4)$ sunt coplanare dacă și

$$\text{numai dacă } \Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

-distanța de la un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ la planul $\pi: ax + by + cz + d = 0$ este

$$d(M_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

-volumul tetraedrului $ABCD$ este $V_{ABCD} = \frac{1}{6} |\Delta|$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$