

FIȘĂ CU SUGESTII PENTRU REZOLVAREA COMPLETĂ A EXERCITIILOR

Clasa a X-a _Combinatorica, Probabilități

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat, M_pedagogic)

Teorie _recapitulare Combinatorică

Fie E și F două mulțimi nevide. Dacă $\text{card } E = k$ și $\text{card } F = n$, ($\text{card } E$ = numărul de elemente ale mulțimii E), atunci numărul de funcții definite pe E cu valori în F este n^k .

Fie E o mulțime nevidă cu n elemente.

Mulțimea finită E se numește **mulțime ordonată**, dacă elementele sale sunt așezate într-o ordine bine determinată.

- Se numește **permutare** a mulțimii neordonate E , orice mulțime ordonată de n elemente din E .
- Numărul permutărilor de n elemente din E este $P_n = n!$, unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, $n \geq 1$, $0! = 1$ (prin convenție).
- Se numesc **aranjamente de n elemente luate câte k** , $0 < k < n$, submulțimile ordonate ale lui E , având fiecare k elemente.

- Numărul aranjamentelor de n elemente luate câte k , $0 \leq k \leq n$, este A_n^k , unde $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

sau $A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$.

- Se numesc **combinări de n elemente luate câte k** , $0 < k < n$, submulțimile neordonate lui E , având fiecare k elemente.
- Numărul combinărilor de n elemente luate câte k , $0 \leq k \leq n$, este C_n^k , unde

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

- Formula combinărilor complementare: $C_n^k = C_n^{n-k}$.
- Formula de descompunere a combinărilor: $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.
- Numărul tuturor submulțimilor unei mulțimi cu n elemente este:
 $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^k + \dots + C_n^n = 2^n$ iar $C_n^0 + C_n^2 + \dots = 2^{n-1}$, $C_n^1 + C_n^3 + \dots = 2^{n-1}$
- Binomul lui Newton: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$; termenul general (de rang k) din binomul lui Newton este $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$, $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$. În dezvoltarea binomului lui Newton sunt $n+1$ termeni.

Teorie _recapitulare Probabilități

1. **Experiență aleatoare** – activitate ale cărei rezultate nu pot fi anticipate cu certitudine
2. **Probă** – fiecare repetare a experienței
3. **Eveniment aleator** – orice situație determinate de unul sau mai multe rezultate posibile ale experienței; se notează cu $A, B, C, \dots$
4. Mulțimea tuturor rezultatelor posibile ale experienței = domeniul de posibilități sau **mulțimea cazurilor posibile**
5. Mulțimea rezultatelor experienței care realizează un eveniment = **mulțimea cazurilor favorabile**
6. **Eveniment sigur** = evenimentul care se realizează cu certitudine în orice probă
7. **Eveniment imposibil** = evenimentul care nu se realizează în orice probă
8. **Evenimentul elementar** – evenimentul care are un singur caz favorabil

FIȘĂ CU SUGESTII PENTRU REZOLVAREA COMPLETĂ A EXERCITIILOR

Clasa a X-a **Combinatorica, Probabilități**

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat, M_pedagogic)

9. Într-un câmp de evenimente egal probabile **probabilitatea realizării unui**

eveniment este:
$$p(A) = \frac{\text{numarul cazurilor favorabile evenimentului}}{\text{numarul total de cazuri}}$$

Exerciții rezolvate:

Exercițiul 4/sub. I/varianta 9/ M_mate-info/2025

4. Se consideră mulțimea $A = \{3, 4, 5, 7, 9\}$, Determinați câte numere naturale impare, de două cifre distincte, se pot forma cu cifre din mulțimea A.

Scriem efectiv numerele **cu cifre distincte** și apoi le numărăm:

$3 \Rightarrow 35, 37, 39$ avem 3 numere impare cu cifra unităților 3

$4 \Rightarrow 43, 45, 47, 49$ avem 4 numere impare cu cifra unităților 4

$5 \Rightarrow 53, 57, 59$ avem 3 numere impare cu cifra unităților 5

$7 \Rightarrow 73, 75, 79$ avem 3 numere impare cu cifra unităților 7

$9 \Rightarrow 93, 95, 97$ avem 3 numere impare cu cifra unităților 9

Prin urmare avem $3 + 4 + 3 + 3 + 3 = 16$ numere de două cifre distincte

Exercițiul 4/sub. I/varianta 7/ M_mate-info/2019

4. Determinați numărul submulțimilor cu cel puțin 8 elemente ale unei mulțimi cu exact 10 elemente.

Submulțimi cu cel puțin 8 elemente din cele 10, înseamnă submulțimi cu 8 elemente, cu 9 elemente și cu 10 elemente

Adică $C_{10}^8 + C_{10}^9 + C_{10}^{10}$

Știm că $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$\begin{aligned} C_{10}^8 + C_{10}^9 + C_{10}^{10} &= \frac{10!}{8!(10-8)!} + \frac{10!}{9!(10-9)!} + \frac{10!}{10!(10-10)!} \\ &= \frac{\cancel{10}! \cdot 9 \cdot 10}{\cancel{8}! 2!} + \frac{\cancel{10}! \cdot 10}{\cancel{9}! 1!} + \frac{\cancel{10}!}{\cancel{10}! 0!} = \frac{9 \cdot \cancel{10}^5}{1 \cdot \cancel{2}} + 10 + 1 = 45 + 11 = 56 \\ 0! &= 1 \end{aligned}$$

FIȘĂ CU SUGESTII PENTRU REZOLVAREA COMPLETĂ A EXERCITIILOR

Clasa a X-a _Combinatorica, Probabilități

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat, M_pedagogic)

Exercițiul 4/sub. I/varianta 5/ M_șt-nat /2014

4. Determinați numărul submulțimilor cu număr impar de elemente ale mulțimii $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

Știm că numărul tuturor submulțimilor unei mulțimi cu n elemente este:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^k + \dots + C_n^n = 2^n$$

iar $C_n^1 + C_n^3 + \dots = 2^{n-1}$ este numărul de submulțimi cu număr impar de elemente

Mulțimea noastră are 4 elemente deci $n = 4$

$$\text{Prin urmare: } C_4^1 + C_4^3 = 2^{4-1} = 2^3 = 8$$

Exercițiul 4/sub. I/varianta 8/ M_M_mate-info /2016

4. Determinați câte numere naturale pare, de trei cifre distincte, se pot forma cu cifrele 5, 7, 8 și 9.

Numerele naturale pare de trei cifre din cele date, sunt de forma $\overline{ab8}$:

578, 758, 598, 958, 798, 978 deci în total 6 numere.

Exercițiul 4/sub. I/varianta 9/ M_pedagogic/2025

4. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A = \{0, 1, 2, 3, \dots, 19\}$, numărul $3n + 2$ să aparțină mulțimii A .

$$p = \frac{\text{nr.caz.favorabile}}{\text{nr.caz.posibile}}$$

cazuri posibile: 0, 1, 2, 3, ..., 19

nr. cazuri posibile = 20

cazuri favorabile: $3n + 2 \in A \Rightarrow 3n + 2 \leq 19$
 $3n \leq 17 \Rightarrow n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

nr. cazuri favorabile = 6

$$p = \frac{\text{nr.caz.favorabile}}{\text{nr.caz.posibile}} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

Exercițiul 4/sub. I/varianta 9/ M_șt.nat/2025

4. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice inegalitatea $3n^2 < 100$.

$$p = \frac{\text{nr.caz.favorabile}}{\text{nr.caz.posibile}}$$

cazuri posibile: 0, 1, 2, 3, ..., 9

FIȘĂ CU SUGESTII PENTRU REZOLVAREA COMPLETĂ A EXERCITIILOR

Clasa a X-a _Combinatorica, Probabilități

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat, M_pedagogic)

nr. cazuri posibile = 10

$$\begin{aligned} \text{cazuri favorabile: } 3n^2 < 100 &\Rightarrow n^2 < 33.(3) \Rightarrow n^2 \leq 33 \\ &\Rightarrow n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \end{aligned}$$

nr. cazuri favorabile = 6

$$p = \frac{\text{nr.caz.favorabile}}{\text{nr.caz.posibile}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Exercițiul 4/sub. I/varianta 2/ M_șt.nat/2013

4. Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, produsul cifrelor acestuia să fie egal cu 5.

$$p = \frac{\text{nr.caz.favorabile}}{\text{nr.caz.posibile}}$$

cazuri posibile: 10, 11, 12, 13, ..., 99

nr. cazuri posibile = 90

cazuri favorabile: produsul cifrelor = 5 , aceste numere sunt: 15, 51

nr. cazuri favorabile = 2

$$p = \frac{\text{nr.caz.favorabile}}{\text{nr.caz.posibile}} = \frac{2}{90} = \frac{1}{45}$$

Exercițiul 4/sub. I/varianta 9/ Mate_info/2013

4. Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie pătrat perfect.

$$p = \frac{\text{nr.caz.favorabile}}{\text{nr.caz.posibile}}$$

cazuri posibile: 10, 11, 12, 13, ..., 99

nr. cazuri posibile = 90

cazuri favorabile: pătrate perfecte: 16, 25, 36, 49, 64, 81

nr. cazuri favorabile = 6

$$p = \frac{\text{nr.caz.favorabile}}{\text{nr.caz.posibile}} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$$