

FIȘĂ _RECAPITULARE NOȚIUNI TEORETICE ȘI EXEMPLE DE EXERCII

Clasa a XII-a _Algebră

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat, M_pedagogic)

Grupul claselor de resturi modulo n , $\mathbb{Z}_n$

Fie $\mathbb{Z}$ mulțimea numerelor întregi și $n \in \mathbb{N}^*$ un număr fixat. Din teorema împărțirii cu rest știm că dacă $x \in \mathbb{Z}$, există $k, r \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < n$, astfel încât $x = nk + r$, $r \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$.

Restul împărțirii lui x la n se mai numește și **x modulo n** , adică $r = x \pmod{n}$

Se numesc clase de resturi modulo n , următoarele mulțimi:

$\hat{0} = \{x \in \mathbb{Z} / x = nk + 0\} = \{nk + 0 / k \in \mathbb{Z}\} = n\mathbb{Z}$ (adică mulțimea numerelor întregi care împărțite la n , dau restul 0)

$\hat{1} = \{x \in \mathbb{Z} / x = nk + 1\} = \{nk + 1 / k \in \mathbb{Z}\} = n\mathbb{Z} + 1$ (adică mulțimea numerelor întregi care împărțite la n , dau restul 1)

$\hat{2} = \{x \in \mathbb{Z} / x = nk + 2\} = \{nk + 2 / k \in \mathbb{Z}\} = n\mathbb{Z} + 2$ (adică mulțimea numerelor întregi care împărțite la n , dau restul 2)

$\vdots$

$\hat{n-1} = \{x \in \mathbb{Z} / x = nk + n-1\} = \{nk + n-1 / k \in \mathbb{Z}\} = n\mathbb{Z} + n-1$ (adică mulțimea numerelor întregi care împărțite la n , dau restul $n-1$)

Mulțimea claselor de resturi modulo n notează cu $\mathbb{Z}_n$, $\mathbb{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \dots, \hat{n-1}\}$

Pe mulțimea $\mathbb{Z}_n$ se definesc două operații:

$+: \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n, (\hat{a}, \hat{b}) \rightarrow \hat{a} + \hat{b} = \widehat{a+b}$ (adică se adună a cu b , se împarte rezultatul la n și se reține doar restul)

$\cdot: \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n, (\hat{a}, \hat{b}) \rightarrow \hat{a} \cdot \hat{b} = \widehat{a \cdot b}$ (adică se înmulțește a cu b , se împarte rezultatul la n și se reține doar restul)

Exemplu: $\mathbb{Z}_4 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\}$

+	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{0}$				
$\hat{1}$				
$\hat{2}$				
$\hat{3}$				

$\cdot$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{0}$				
$\hat{1}$				
$\hat{2}$				
$\hat{3}$				

FIȘĂ _RECAPITULARE NOȚIUNI TEORETICE ȘI EXEMPLE DE EXERCII

Clasa a XII-a _Algebră

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat, M_pedagogic)

Teoremă

a) $(\mathbb{Z}_n, +)$ este un grup comutativ ("+" este asociativă, comutativă, $\hat{0}$ este elementul neutru și

orice element $\hat{a} \in \mathbb{Z}_n$ este simetrizabil și elementul simetric/opus este $-\hat{a} = n - \hat{a}$)

b) $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ este un monoid comutativ ("." este asociativă, comutativă, $\hat{1}$ este elementul neutru).

Obs. Un element $\hat{a} \in \mathbb{Z}_n$ are simetrizabil dacă $(a, n) = 1$.

Exerciții propuse pentru activitatea în clasă:

1. Alcătuiți tablele adunării și a înmulțirii pentru $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5$.

2. În grupul aditiv $\mathbb{Z}_{12}$, rezolvați ecuațiile:

a) $\hat{5} + \hat{x} = \hat{8}$, b) $\hat{x} + \hat{7} = \hat{5}$, c) $\hat{11} + \hat{x} = \hat{4}$

3. Să se calculeze în $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ suma: $\hat{3} + \hat{4} + \hat{5} + \hat{7} + \hat{8} + \hat{9}$

4. Să se calculeze determinantul: $\begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{3} & \hat{5} \end{vmatrix}$ în $\mathbb{Z}_7$.

5. Să se calculeze determinantul: $\begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{3} & \hat{0} \\ \hat{2} & \hat{1} & \hat{3} \\ \hat{3} & \hat{1} & \hat{2} \end{vmatrix}$ în $\mathbb{Z}_6$.

Temă: Compuneți exerciții asemănătoare și rezolvați-le.