

FIȘĂ _RECAPITULARE NOȚIUNI TEORETICE ȘI EXEMPLE DE EXERCII

Clasa a XII-a _**Analiză matematică**

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat)

Def. Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă, $a, b \in I$ și F o primitivă oarecare a funcției f . **Numărul**

$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$ se numește **integrala definită a funcției f** pe intervalul $[a, b]$.

Obs. $\int_a^a f(x) dx = 0$ și $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$

Proprietăți ale integralei definite

T1. Fie f, g două funcții continue pe I , $a, b \in I$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Atunci

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

T2. Dacă f este o funcție continuă pe I atunci pentru oricare trei puncte $a, b, c \in I$ avem:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

T3. Fie f o funcție continuă pe I , iar $a, b \in I$ și $a < b$. Dacă $f \geq 0$ pe $[a, b]$, atunci $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

Corolar. Fie f, g două funcții continue pe I , $a, b \in I$, $a < b$. Dacă $f \leq g$ pe $[a, b]$, atunci

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

T4. Fie f o funcție continuă pe I , iar $a, b \in I$ și $a < b$. Dacă m și M sunt două numere reale astfel încât

$$m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b], \text{ atunci } m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

T5. Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă, atunci există $\zeta \in [a, b]$ astfel încât

$$\int_a^b f(x) dx = f(\zeta)(b-a).$$

Aplicații ale integralei definite. Aria unei suprafețe plane

T1. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă pozitivă și fie

$$\Gamma_f = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\} \text{ numită } \textbf{subgraficul lui } f.$$

Atunci mulțimea Γ_f are arie și

$$\text{aria}(\Gamma_f) = \int_a^b f(x) dx.$$

FIȘĂ _RECAPITULARE NOȚIUNI TEORETICE ȘI EXEMPLE DE EXERCIȚII

Clasa a XII-a _**Analiză matematică**

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat)

Corolar. Fie $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții continue astfel încât

$$f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b] \text{ și}$$

$$\Gamma_{f,g} = \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x) \right\} \text{ suprafața plană, numită}$$

intergrafic, cuprinsă între cele două funcții și dreptele de ecuații $x=a$ și $x=b$. Atunci, $\Gamma_{f,g}$ are arie

$$\text{și } \text{aria}(\Gamma_{f,g}) = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx$$

Volumul corpului de rotație

T. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă pozitivă și

$$C_f = \left\{ (x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [a, b], \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x) \right\} \text{ numit corpul de rotație}$$

în jurul axei Ox determinat de funcția f . Atunci mulțimea C_f are volum și

$$\text{vol}(C_f) = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Exerciții rezolvate:

1. Calculați: a) $\int_1^2 (x^2 - 5x + 4) dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (7x^4 - 3 \cos x + 4) dx$; c) $\int_1^4 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x} \right) dx$; d) $\int_0^2 (x-4)e^x dx$;

e) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{5 - \sin x} dx$; f) $\int_2^3 \frac{x}{(x-1)(x+3)} dx$

Rezolvări:

a) $\int_1^2 (x^2 - 5x + 4) dx = \int_1^2 x^2 dx - \int_1^2 5x dx + \int_1^2 4 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_1^2 - 5 \left. \frac{x^2}{2} \right|_1^2 + 4x \Big|_1^2 = \left(\frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} \right) - 5 \left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right) + 4(2-1)$

$$= \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) - 5 \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2} \right) + 4 = \frac{7}{3} - 5 \frac{3}{2} + 4 = \frac{2}{3} - \frac{15}{2} + 4 = \frac{4 - 45 + 24}{6} = \frac{-17}{6}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (7x^4 - 3 \cos x + 4) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 7x^4 dx - 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = 7 \left. \frac{x^5}{5} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} - 3 \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 4x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

b) $= 7 \left(\frac{\left(\frac{\pi}{2} \right)^5}{5} - \frac{0}{5} \right) - 3 \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) + 4 \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{7}{5} \cdot \frac{\pi^5}{2^5} - 3 + 2\pi = \frac{7\pi^5}{160} + 2\pi - 3$

FIȘĂ _RECAPITULARE NOȚIUNI TEORETICE ȘI EXEMPLE DE EXERCIȚIIClasa a XII-a _**Analiză matematică**

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat)

$$c) \int_1^4 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x} \right) dx = \int_1^4 \sqrt{x} dx + \int_1^4 \frac{1}{x} dx = \int_1^4 x^{\frac{1}{2}} dx + \ln x \Big|_1^4 = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \Big|_1^4 + \left(\ln 4 - \ln 1 \right) = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_1^4 + \ln 4$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{x^3} \Big|_1^4 + \ln 4 = \frac{2}{3} \left(\sqrt{4^3} - \sqrt{1^3} \right) + \ln 4 = \frac{2}{3} \left(\sqrt{64} - 1 \right) + \ln 4 = \frac{2}{3} \cdot 7 + \ln 4 = \frac{14}{3} + \ln 4$$

$$d) \int_0^2 (x-4)e^x dx \text{ calculăm } \int (x-4)e^x dx \text{ prin metoda integrării prin părți}$$

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

$$f(x) = x-4 \Rightarrow f'(x) = 1$$

$$g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = \int g'(x)dx = \int e^x dx = e^x$$

$$\text{deci } \int (x-4)e^x dx = (x-4)e^x - \int e^x dx = (x-4)e^x - e^x + C = e^x(x-5) + C$$

$$\int_0^2 (x-4)e^x dx = e^x(x-5) \Big|_0^2 = e^2(2-5) - e^0(0-5) = -3e^2 + 5$$

$$e) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{5-\sin x} dx \text{ calculăm } \int \frac{\cos x}{5-\sin x} dx \text{ prin metoda schimbării de variabilă}$$

$$u(x) = 5 - \sin x = t$$

$$u'(x) = -\cos x$$

$$u'(x)dx = -\cos x dx = dt$$

$$I_1 = -\int \frac{dt}{t} = -\int \frac{1}{t} dt = -\ln|t| + C \text{ rezultă } \int \frac{\cos x}{5-\sin x} dx = -\ln|5-\sin x| + C$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{5-\sin x} dx = -\ln|5-\sin x| \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \left(-\ln \left| 5 - \sin \frac{\pi}{3} \right| \right) - \left(-\ln \left| 5 - \sin 0 \right| \right) = -\ln \left| 5 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right| + \ln 5$$

$$f) \int_2^3 \frac{x}{(x-1)(x+3)} dx \text{ calculăm } \int \frac{x}{(x-1)(x+3)} dx \text{ folosind metoda coeficienților nedeterminați}$$

$$\frac{x}{(x-1)(x+3)} = \frac{x+3}{x-1} A + \frac{x-1}{x+3} B \cdot (x-1)(x+3) \text{ obținem: } \begin{cases} x = Ax + 3A + Bx - B \\ x = x(A+B) + (3A-B) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 3A-B=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{4} \\ B=1-A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{4} \\ B=\frac{3}{4} \end{cases} \text{ deci}$$

$$\int \frac{x}{(x-1)(x+3)} dx = \int \frac{\frac{1}{4}}{x-1} dx + \int \frac{\frac{3}{4}}{x+3} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{3}{4} \int \frac{1}{x+3} dx = \frac{1}{4} \ln|x-1| + \frac{3}{4} \ln|x+3| + C$$

FIȘĂ _RECAPITULARE NOȚIUNI TEORETICE ȘI EXEMPLE DE EXERCIȚII

Clasa a XII-a _**Analiză matematică**

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat)

$$\int_2^3 \frac{x}{(x-1)(x+3)} dx = \left(\frac{1}{4} \ln|x-1| + \frac{3}{4} \ln|x+3| \right) \Big|_2^3 = \left(\frac{1}{4} \ln|3-1| + \frac{3}{4} \ln|3+3| \right) - \left(\frac{1}{4} \ln|2-1| + \frac{3}{4} \ln|2+3| \right) \\ = \left(\frac{1}{4} \ln 2 + \frac{3}{4} \ln 6 \right) - \left(\frac{1}{4} \ln 1 + \frac{3}{4} \ln 5 \right) = \frac{1}{4} \ln 2 + \frac{3}{4} \ln 6 - \frac{3}{4} \ln 5$$

Exerciții propuse:

2. Calculați, utilizând și fișele anterioare: a) $\int_0^1 (5x^3 - 6\cos x + 2) dx$; b) $\int_1^2 \left(5\sqrt{x} + \frac{1}{x^3} \right) dx$;

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1) \sin x dx$; d) $\int_1^2 (6x+7) \ln x dx$; e) $\int_0^1 \sqrt{2-x^2} dx$; f) $\int_1^e \frac{dx}{x(5+\ln x)}$; g) $\int_1^2 \frac{x+2}{x^2+2x+5} dx$;

h) $\int_0^1 x\sqrt{x^2+9} dx$; i) $\int_1^2 \frac{1}{x(x+5)} dx$; j) $\int_2^3 \frac{x-1}{(x+2)(x+5)} dx$

Exercițiu rezolvat:

3. Calculați : $\int_{-1}^2 f(x) dx$, unde $f(x) = \begin{cases} 1+e^x, & x \in [-1;1] \\ x+e, & x \in (1;2] \end{cases}$

Rezolvare: folosim proprietatea dată prin **T2**, a integralei definite:

Știm că f este continuă pe $[-1;1) \cup (1;2]$ ca funcție elementară (1)

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (1+e^x) = 1+e \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (x+e) = 1+e \\ f(1) &= 1+e \end{aligned} \right| \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Rightarrow f \text{ este continuă în } 1 \text{ (2)}$$

Din (1) și (2) rezultă că f este continuă pe $[-1;2]$ deci se poate aplica proprietatea **T2**; avem

$$\int_{-1}^2 f(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_{-1}^1 (1+e^x) dx + \int_1^2 (x+e) dx = (x+e^x) \Big|_{-1}^1 + \left(\frac{x^2}{2} + ex \right) \Big|_1^2 \\ = \left[(1+e^1) - (-1+e^{-1}) \right] + \left[\left(\frac{2^2}{2} + e \cdot 2 \right) - \left(\frac{1^2}{2} + e \cdot 1 \right) \right] = 1+e+1 - \frac{1}{e} + 2+2e - \frac{1}{2} - e = 4+2e - \frac{1}{e} - \frac{1}{2}$$

Exerciții propuse:

4. Calculați : $\int_{-1}^1 f(x) dx$, unde $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [-1;0] \\ x, & x \in (0;1] \end{cases}$

5. Calculați : $\int_{-2}^0 f(x) dx$, unde $f(x) = \begin{cases} e \cdot e^x, & x \in [-2;-1] \\ x+2, & x \in (-1;0] \end{cases}$

6. Calculați : $\int_{-1}^1 f(x) dx$, unde $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \in [-1;0) \\ e^x+1, & x \in [0;1] \end{cases}$;

7. Calculați : $\int_{-1}^1 f(x) dx$, unde $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \in [-1;0] \\ x+\sqrt{x}, & x \in (0;1] \end{cases}$

FIȘĂ _RECAPITULARE NOȚIUNI TEORETICE ȘI EXEMPLE DE EXERCIȚII

Clasa a XII-a _**Analiză matematică**

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat)

8. Calculați : $\int_{-3}^{-2} f(x)dx$, unde $f(x) = \begin{cases} x+5, & x \in [-3; -1) \\ 3x^2+1, & x \in [-1; 0] \end{cases}$

Exercițiu rezolvat:

9. Fără a calcula integrala, să se demonstreze că $0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^2)dx \leq \ln 2$

Rezolvare: avem funcția $f: [0;1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(1+x^2)$, trebuie să determinăm m și M reale pentru care $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [0;1]$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \cdot (1+x^2)' = \frac{2x}{1+x^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{1+x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

x	0						1
$f'(x)$	0	+	+	+	+	+	+
$f(x)$	0	$\nearrow$					$\ln 2$
	m						M

$$m = \ln(1+0^2) = \ln 1 = 0; M = \ln(1+1^2) = \ln 2$$

$$m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [0;1] \Leftrightarrow 0 \leq f(x) \leq \ln 2, \forall x \in [0;1]$$

Aplicăm **T4** și avem $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$ adică $0(1-0) \leq \int_0^1 f(x)dx \leq (\ln 2)(1-0)$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^2)dx \leq \ln 2$$

Exerciții propuse:

10. Fără a calcula integrala, să se demonstreze că $\frac{1}{3} \leq \int_4^7 \frac{x-3}{x+5} dx \leq 1$.

11. Fără a calcula integrala, să se demonstreze că $1 \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e$.

12. Fără a calcula integrala, să se demonstreze că $\frac{1}{3} \leq \int_1^2 \frac{1}{x+1} dx \leq \frac{1}{2}$.

Exercițiu rezolvat:

13. Se consideră funcția $f: (0;+\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + \frac{1}{x}$. a) Să se calculeze aria suprafeței plane

cuprinse între graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=2$; b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox , a graficului funcției $g: [1;2] \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $g(x) = f(x), x \in [1;2]$.

Rezolvare: a) $aria(\Gamma_f) = \int_a^b f(x)dx$ adică

$$aria(\Gamma_f) = \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + \ln|x| \right) \Big|_1^2 = \left(\frac{2^2}{2} + \ln|2| \right) - \left(\frac{1^2}{2} + \ln|1| \right) = 2 + \ln 2 - \frac{1}{2} - \ln 1 = \frac{3}{2} + \ln 2$$

FIȘĂ _RECAPITULARE NOȚIUNI TEORETICE ȘI EXEMPLE DE EXERCII

Clasa a XII-a _**Analiză matematică**

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat)

b) $vol(C_g) = \pi \int_a^b g^2(x) dx$, unde $g(x) = f(x), x \in [1; 2]$,

$$\begin{aligned} vol(C_g) &= \pi \int_1^2 g^2(x) dx = \pi \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi \int_1^2 \left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2\right) dx = \pi \int_1^2 \left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right) dx \\ &= \pi \left(\frac{x^3}{3} + 2x + \frac{x^{-1}}{-1}\right) \Big|_1^2 = \pi \left(\frac{x^3}{3} + 2x - \frac{1}{x}\right) \Big|_1^2 = \pi \left[\left(\frac{2^3}{3} + 2 \cdot 2 - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1^3}{3} + 2 \cdot 1 - \frac{1}{1}\right)\right] = \pi \left(\frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - 2 + 1\right) \\ &= \pi \left(\frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{1}\right) = \frac{14 - 3 + 18}{6} \pi = \frac{29}{6} \pi \end{aligned}$$

Exerciții propuse:

14. Se consideră funcțiile $f, g : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definite prin $f(x) = e^x$ și $g(x) = e^x + e^{-x}$.

- Să se determine $\int f(x) dx$;
- Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$;
- Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $h : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = xf(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$;
- Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox , a graficului funcției g .

15. Se consideră funcția $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1 - \sqrt{x}$.

- Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$;
- Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox , a graficului funcției f .

16. Se consideră funcțiile $f, g : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definite prin $f(x) = 1 - x$ și $g(x) = \sqrt{1 - x}$.

- Să se determine $\int f(x) dx$;
- Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$;
- Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox , a graficului funcției g .

17. Se consideră funcția $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$.

- Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $g : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{f^2(x)}{x^2 + 1}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$;
- Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox , a graficului funcției f ;
- Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox , a graficului funcției

$$h : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = e^{\frac{x}{2}} \cdot f(x).$$

18. Se consideră funcțiile $f : [1; e] \rightarrow \mathbb{R}$, definite prin $f(x) = \ln x$.

- Să se determine $\int f'(x) dx$;
- Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = e$;

FIȘĂ _RECAPITULARE NOȚIUNI TEORETICE ȘI EXEMPLE DE EXERCIȚII

Clasa a XII-a _**Analiză matematică**

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat)

19. Se consideră funcția $f: [0;1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x+2}$.

a) Să se determine $\int f^2(x) dx$;

b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$;

c) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox , a graficului funcției f .

20. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{2009} + x + 1$.

a) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$;

b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox , a graficului funcției $h: [1;3] \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = f(x) - x^{2009} - 1$.

21. Se consideră funcția $f: [0;1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x\sqrt{2-x^2}$

a). Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$;

b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox , a graficului funcției f .

22. Se consideră funcția $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + \frac{1}{x}$.

a) Calculați $\int_1^3 \left(f(x) - \frac{1}{x} \right) dx$.

b) Determinați volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox , a graficului funcției $g: [1;2] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(x)$

c) Calculați $\int_1^e f(x) \ln x dx$. (Bac 2010)

23. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+3}, & x \geq 1 \\ 2x, & x < 1 \end{cases}$.

a) Demonstrați că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Determinați volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox , a graficului funcției $g: [1;2] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(x)$

c) Calculați $\int_1^{\sqrt{6}} x \cdot f(x) dx$. (Bac 2010)

24. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2+10}$.

a) Calculați volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox , a graficului funcției $g: [0;3] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(x)$.

b) Demonstrați că orice primitivă F a funcției f este crescătoare pe mulțimea $\mathbb{R}$.

c) Demonstrați că $\int_{-10}^{10} f(x) dx = 2 \int_0^{10} f(x) dx$. (Bac 2011)

25. Pentru orice număr natural nenul n se consideră funcția $f_n: [0;1] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = x^n e^x$.

FIȘĂ _RECAPITULARE NOȚIUNI TEORETICE ȘI EXEMPLE DE EXERCIIClasa a XII-a **Analiză matematică**

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat)

a) Calculați $\int_0^1 \frac{f_1(x)}{e^x} dx$.

b) Calculați $\int_0^1 f_1(x) dx$.

c) Arătați că $\int_0^1 f_n(x^2) dx \geq \frac{1}{2n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. (Bac 2011)

26. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x^2 + 2x + 1$.a) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$;b) Arătați că orice primitivă a funcției f este concavă pe intervalul $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$.c) Demonstrați că oricare ar fi $a \geq 2$, are loc inegalitatea $\int_0^a f(x) dx \geq 3a + 2$. (Bac 2011)

27. Se consideră funcția $f: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x}, & x > 1 \\ \frac{x-1}{x}, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$.

a) Calculați $\int_2^e \frac{f(x)}{\ln x} dx$.

b) Fie $g: (0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(x)$. Determinați primitiva funcției g , primitivă al cărei grafic conține punctul $A(1; 5)$.

c) Calculați $\int_{\frac{1}{2}}^e f(x) dx$.

28. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{2012} + x^{2011} + x^2 + x$.a) Determinați primitiva $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției f , care verifică relația $F(0) = 1$.

b) Calculați $\int_0^1 \frac{f(x)}{x+1} dx$.

c) Calculați volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox , a graficului funcției $g: [1; 2] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(x) - x^{2012} - x^{2011}$. (Bac 2012)**29.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = xe^x$.a) Arătați că funcția $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = xe^x - e^x + 2012$, este o primitivă a funcției f .

b) Claculați $\int_0^e f(\ln x) dx$.

FIȘĂ _RECAPITULARE NOȚIUNI TEORETICE ȘI EXEMPLE DE EXERCIIClasa a XII-a _**Analiză matematică**

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat)

c) Calculați volumul corpului obținut prin rotația , în jurul axei Ox , a graficului funcției

$$g : [1; 2] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{f(x)}{x}. \text{ (Bac 2012)}$$

30. Se consideră funcția $f : (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x}$.

a) Calculați $\int_1^2 \left(f(x) - \frac{1}{x} \right) dx$.

b) Arătați că funcția $F : (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = x^2 + x + \ln x$ este o primitivă a funcției f .

c) Calculați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = 2$. (Bac 2013)

31. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x^2 + 1$.

a) Calculați $\int_0^1 f'(x) dx$.

b) Arătați că funcția $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = x^3 + x + 1$ este o primitivă a funcției f .

c) Calculați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.