

FIȘĂ _RECAPITULARE NOȚIUNI TEORETICE ȘI EXEMPLE DE EXERCII

Clasa a XII-a _Algebră

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat)

POLINOAME_EXERCII

1. Se consideră determinantul $d = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$, unde $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ sunt soluțiile ecuației

$$x^3 - 3x + 2 = 0.$$

a) Să se calculeze $x_1 + x_2 + x_3$.

b) Să se arate că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -6$.

c) Să se calculeze valoarea determinantului d .

Sugestii de rezolvare:

a) Scrieți relațiile lui Viète:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} = \\ x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} = \end{cases}$$
 rezultă că $x_1 + x_2 + x_3 =$

b) $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ sunt soluții, deci ele verifică ecuația adică:

$$\begin{cases} x_1^3 - 3x_1 + 2 = 0 \\ x_2^3 - 3x_2 + 2 = 0 \\ x_3^3 - 3x_3 + 2 = 0 \end{cases} \text{ se adună toate relațiile și se obține: } (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - 3(x_1 + x_2 + x_3) + 6 = 0, \text{ din}$$

această relație, după înlocuirea lui $x_1 + x_2 + x_3$, se obține $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = \dots$

c) Se calculează d și se folosesc relațiile lui Viète scrise la punctul a)

$$\text{Se obține } d = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 3x_1x_2x_3 - (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) = \dots$$

2. Se consideră polinoamele cu coeficienți reali $f = X^4 + aX^3 - 28X^2 + bX + 96$, $g = X^2 + 2X - 24$ și $h = (X^2 + 2X - 24)(X^2 - 4)$.

a) Să se scrie forma algebrică a polinomului h .

b) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât polinoamele f și h să fie egale.

c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $16^x + 2 \cdot 8^x - 28 \cdot 4^x - 8 \cdot 2^x + 96 = 0$.

Sugestii de rezolvare:

a) se efectuează operația de înmulțire, se obține:

$$h = (X^2 + 2X - 24)(X^2 - 4) = X^4 + 2X^3 - 28X^2 - 8X + 96$$

b) $f = h$ dacă coeficienții corespunzători sunt egali, rezultă că $a = 2$ și $b = -8$

$$16^x + 2 \cdot 8^x - 28 \cdot 4^x - 8 \cdot 2^x + 96 = 0 \Leftrightarrow (2^4)^x - 2 \cdot (2^3)^x - 28 \cdot (2^2)^x - 8 \cdot 2^x + 96 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\text{c) } (2^x)^4 - 2 \cdot (2^x)^3 - 28 \cdot (2^x)^2 - 8 \cdot 2^x + 96 = 0$$

FIȘĂ _RECAPITULARE NOȚIUNI TEORETICE ȘI EXEMPLE DE EXERCII

Clasa a XII-a _Algebră

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat)

observăm că practic avem $f(2^x) = 0$ (dacă înlocuim în f pe X cu 2^x), dar $f = h$ deci ecuația

noastră este echivalentă cu $\left((2^x)^2 + 2(2^x) - 24\right)\left((2^x)^2 - 4\right) = 0$ ceea ce înseamnă că

$$(2^x)^2 + 2(2^x) - 24 = 0$$

și $(2^x)^2 - 4 = 0$; notăm $2^x = t$ și rezolvăm ambele ecuații.

3. Fie polinoamele $f = X^3 + aX^2 + X + \hat{1}$ și $g = X + \hat{3}$ din inelul $\mathbb{Z}_5[X]$

a) Să se determine $a \in \mathbb{Z}_5$ astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul g .

b) Pentru $a = \hat{1}$ să se arate că $f = (X + \hat{1})(X^2 + \hat{1})$.

c) Pentru $a = \hat{1}$ să se rezolve în inelul $(\mathbb{Z}_5; +; \cdot)$ ecuația $f(x) = \hat{0}$.

Sugestii de rezolvare:

a) $\mathbb{Z}_5 = \{\hat{0}; \hat{1}; \hat{2}; \hat{3}; \hat{4}\}$; $f: g \Leftrightarrow f: (X + \hat{3}) \Leftrightarrow f(-\hat{3}) = \hat{0}$, dar $-\hat{3} = \hat{2}$ înseamnă că

$$f(\hat{2}) = \hat{0} \Rightarrow (\hat{2})^3 + a(\hat{2})^2 + \hat{2} + \hat{1} = \hat{0} \Leftrightarrow \hat{4}a + \hat{3} + \hat{2} + \hat{1} = \hat{0} \Leftrightarrow \hat{4}a = -\hat{1} \Leftrightarrow \hat{4}a = \hat{4} \Leftrightarrow a = \hat{1}$$

b) se scrie f pentru $a = \hat{1}$ și apoi se înlocuiește în $f = (X + \hat{1})(X^2 + \hat{1})$, se desfac parantezele și se obține egalitate;

c) pentru rezolvarea ecuației se pot folosi: 1. relația de la punctul anterior, având de rezolvat astfel două ecuații, sau 2. înlocuind fiecare valoare din $\mathbb{Z}_5 = \{\hat{0}; \hat{1}; \hat{2}; \hat{3}; \hat{4}\}$ în ecuație, soluții fiind acele valori ale lui x pentru care se obține propoziție adevărată.

4. Se consideră polinoamele cu coeficienți raționali $f = X^4 + aX^3 + bX^2 - 5X + 6$ și $g = X^3 + X - 2$.

a) Să se determine $a, b \in \mathbb{Q}$ astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul g .

b) Pentru $a = -3$ și $b = 1$ să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbb{Q}[X]$

c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{3x} - 3^{2x+1} + 3^x - 5 + 6 \cdot 3^{-x} = 0$.

Sugestii de rezolvare:

a) se efectuează împărțirea:

$X^4 + aX^3 + bX^2 - 5X + 6$	$X^3 + X - 2$
$-X^4 \qquad -X^2 + 2X$	$X + a = c$
$/ \quad +aX^3 + X^2(b-1) - 3X + 6$	
$-aX^3 \qquad -aX + 2a$	
$/ \quad X^2(b-1) + X(-3-a) + 6 + 2a$	

Restul împărțirii este $r = +X^2(b-1) + X(-3-a) + 6 + 2a$, pentru ca f să fie divizibil cu polinomul g trebuie ca $r = 0$, adică $r = 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X + 0 = +X^2(b-1) + X(-3-a) + 6 + 2a$ rezultă

$$\begin{cases} b-1=0 \\ -3-a=0 \\ 6+2a=0 \end{cases} \text{ de unde rezultă că } b=1 \text{ și } a=-3$$

FIȘĂ _RECAPITULARE NOȚIUNI TEORETICE ȘI EXEMPLE DE EXERCII

Clasa a XII-a _Algebră

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat)

5. Se consideră polinoamele $f = \hat{3}X^5 + \hat{3}X^3 + \hat{3}X + \hat{4} \in \mathbb{Z}_5[X]$ și $g = \hat{3}X^3 + \hat{3}X^2 + \hat{2}X + \hat{3} \in \mathbb{Z}_5[X]$.

a) Să se calculeze $f(\hat{0}) + f(\hat{1})$.

b) Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{Z}_5$ ecuația $f(x) = \hat{0}$.

c) Să se determine câtul împărțirii polinomului f la polinomul g .

Sugestii de rezolvare:

c) se efectuează împărțirea, având în vedere că lucrăm în $\mathbb{Z}_5 = \{\hat{0}; \hat{1}; \hat{2}; \hat{3}; \hat{4}\}$

$$\begin{array}{r|l} \hat{3}X^5 + \hat{0}X^4 + \hat{3}X^3 + \hat{0}X^2 + \hat{3}X + \hat{4} & \hat{3}X^3 + \hat{3}X^2 + \hat{2}X + \hat{3} \\ \hline -\hat{3}X^5 - \hat{3}X^4 - \hat{2}X^3 - \hat{3}X^2 & \\ \hline / & -\hat{3}X^4 + X^3 - \hat{3}X^2 + \hat{3}X + \hat{4} \\ & \hat{3}X^4 + \hat{3}X^3 + \hat{2}X^2 + \hat{3}X \\ \hline / & \hat{4}X^3 - X^2 + X + \hat{4} \\ & \hat{4}X^3 + \hat{4}X^2 + X + \hat{4} \\ \hline / & \hat{3}X^2 + \hat{2}X + \hat{3} \end{array}$$

$$c = X^2 - X + \hat{3} = X^2 + \hat{4}X + \hat{3} \text{ și } r = \hat{3}X^2 + \hat{2}X + \hat{3}$$

6. Se consideră polinomul $f = mX^3 + 11X^2 + 7X + m, f \in \mathbb{R}[X]$.

a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul $g = X - 1$.

b) Să se determine $m \in \mathbb{Q}$ astfel încât $f(\sqrt{2}) \in \mathbb{Q}$.

c) Pentru $m = 9$ să se calculeze suma pătratelor rădăcinilor polinomului f .

Sugestii de rezolvare:

a) $f: g \Leftrightarrow f: (X - 1) \Leftrightarrow f(1) = 0$ se obține o relație din care se calculează m

$$f(\sqrt{2}) \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow m(\sqrt{2})^3 + 11(\sqrt{2})^2 + 7\sqrt{2} + m \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow 2\sqrt{2}m + 7\sqrt{2} + 22 + m \in \mathbb{Q}$$

$$\text{b) } \Leftrightarrow \sqrt{2}(2m + 7) + (22 + m) \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow 2m + 7 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{7}{2}$$

obs: termenul care conține radical nu este rațional!!!

c) dacă $m = 9$ atunci $f = 9X^3 + 11X^2 + 7X + 9$, trebuie să calculăm suma pătratelor rădăcinilor polinomului f adică $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$; pentru asta avem nevoie de relațiile lui Viète:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} = \\ x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} = \end{cases} \text{ , folosim apoi } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$$

7. Se consideră polinomul $f = X^3 - (m + 1)X^2 - 3X + 3, f \in \mathbb{Q}[X]$.

a) Să se determine $m \in \mathbb{Q}$ astfel încât suma rădăcinilor polinomului f să fie egală cu 1.

b) Să se determine $m \in \mathbb{Q}$ astfel încât polinomul f să admită rădăcina $x_1 = \sqrt{3}$.

FIȘĂ _RECAPITULARE NOȚIUNI TEORETICE ȘI EXEMPLE DE EXERCIIClasa a XII-a **Algebră**

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat)

c) Pentru $m = 0$ să se descompună polinomul f în factori ireductibili în $\mathbb{Q}[X]$.**Sugestii de rezolvare:**a) se află $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} =$, se obține o relație din care se calculează m b) f admite rădăcina $x_1 = \sqrt{3}$ dacă $f(\sqrt{3}) = 0$, se obține o relație din care se calculează m c) pentru $m=0$, $f = X^3 - X^2 - 3X + 3$ care are rădăcina $\sqrt{3}$, se folosește schema lui Horner

	X^3	X^2	X	X^0
	1	-1	-3	3
$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}-1$	$-\sqrt{3}$	$0 = r$

Deci f se descompune astfel: $f = (X - \sqrt{3})(X^2 + (\sqrt{3} - 1)X - \sqrt{3})$; pentru a vedea dacă se mai poate descompune egalăm cu 0 paranteza a doua $X^2 + (\sqrt{3} - 1)X - \sqrt{3} = 0$ care este o ecuație de gradul II

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (\sqrt{3} - 1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-\sqrt{3}) = 3 - 2\sqrt{3} + 1 + 4\sqrt{3} = 3 + 2\sqrt{3} + 1 = (\sqrt{3} + 1)^2$$

$$x_1 = \frac{-(\sqrt{3} - 1) - (\sqrt{3} + 1)}{2} = \frac{-\sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} - 1}{2} = -\sqrt{3}; \quad x_1 = \frac{-(\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{3} + 1)}{2} = \frac{-\sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} + 1}{2} = 1$$

Prin urmare $X^2 + (\sqrt{3} - 1)X - \sqrt{3} = (X + \sqrt{3})(X - 1)$ adică $f = (X - \sqrt{3})(X + \sqrt{3})(X - 1)$

Exerciții propuse spre rezolvare:**8.** Fie polinomul $f = X^3 + aX^2 - aX - 4$, $f \in \mathbb{R}[X]$.a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_1 + x_2 + x_3 = -2$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile reale ale polinomului f .b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul $X^2 - 2$.**9.** Se consideră polinomul $f = X^4 + aX^3 - X - 1$, unde $a \in \mathbb{Z}$.a) Să se determine a știind că $x = 1$ este rădăcină a polinomului f .b) Pentru $a = 1$ să se determine rădăcinile reale ale polinomului f .**10.** Se consideră polinomul $f = (X^2 - 2X + 1)^2 - a^2$, unde $a \in \mathbb{R}$.a) Știind că $a = 0$ să se determine soluțiile ecuației $f(x) = 0$.b) Să se verifice că $f = (X^2 - 2X + 1 + a)(X^2 - 2X + 1 - a)$.**11.** Se consideră polinoamele $f = X^2 - 12X + 35$ și $g = (X - 6)^{2009} + X - 6$. Polinomul g are forma algebrică $g = a_{2009}X^{2009} + a_{2008}X^{2008} + \dots + a_1X + a_0$, cu $a_0, a_1, \dots, a_{2009} \in \mathbb{R}$.a) Să se calculeze $f(5) + g(5)$.b) Să se arate că numărul $a_0 + a_1 + \dots + a_{2009}$ este negativ.c) Să se determine restul împărțirii polinomului g la polinomul f .

FIȘĂ _RECAPITULARE NOȚIUNI TEORETICE ȘI EXEMPLE DE EXERCII

Clasa a XII-a _Algebră

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat)

Sugestii de rezolvare:b) $a_0 + a_1 + \dots + a_{2009}$ se obține din $g(1)$ din forma algebrică, dar g mai are și forma $g = (X - 6)^{2009} + X - 6$, adică $g(1) = (-5)^{2009} + 1 - 6 = -5^{2009} - 5 < 0$ adică $g(1)$ este negativ.c) se folosește teorema împărțirii cu rest $g = f \cdot c + r$ unde gradul lui r este mai mic decât gradul lui f , adică poate fi de forma $r = aX + b$, deci $g = f \cdot c + aX + b$ din $f = 0 \Rightarrow x_1 = 5$ și $x_2 = 7$ adică $f = (X - 5)(X - 7)$, prin urmare $g = (X - 5)(X - 7) \cdot c + aX + b$

$$\begin{cases} g(5) = 5a + b = -2 \\ g(7) = 7a + b = 2 \end{cases} \text{ și rezolvând sistemul se obține: } \begin{cases} a = 2 \\ b = -12 \end{cases}$$

12. Se consideră numerele reale x_1, x_2, x_3 cu proprietatea că:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2; \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{1}{2}; x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -2$$

a) Să se calculeze $x_1x_2x_3$.b) Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$, știind că ecuația $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ are soluțiile x_1, x_2, x_3 .c) Să se descompună polinomul $f = X^3 - 2X^2 - 2X + 4$ în factori ireductibili peste $\mathbb{R}[X]$.**Sugestii de rezolvare:**

a) din $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{1}{2}$ rezultă $\frac{x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2}{x_1x_2x_3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-2}{x_1x_2x_3} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1x_2x_3 = -4$

b) se folosesc relațiile lui Viète

c) se observă că 2 este rădăcină, se folosește schema lui Horner pentru a descompune pe f : $f = (X - 2)c$ și apoi se face $c = 0$ care este o ecuație de gradul II**13.** Se consideră polinoamele $f = X^3 + 3X^2 + 3X + 1$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ și $g = X^2 - 2X + 1$ cu rădăcinile $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.a) Să se calculeze diferența $S - S'$, unde $S = x_1 + x_2 + x_3$ și $S' = y_1 + y_2$.b) Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la g .c) Să se calculeze produsul $f(y_1) \cdot f(y_2)$.**Sugestii de rezolvare:**

a) se scriu relațiile lui Viète pentru cele două polinoame

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \\ x_1x_2x_3 = \end{cases} \text{ și } \begin{cases} y_1 + y_2 = \\ y_1y_2 = \end{cases} \text{ de unde rezultă } S = x_1 + x_2 + x_3 = \text{ și } S' = y_1 + y_2 =$$

c) se folosește faptul că $y_1 = y_2 = 1$

$$f(y_1) \cdot f(y_2) = (y_1^3 + 3y_1^2 + 3y_1 + 1)(y_2^3 + 3y_2^2 + 3y_2 + 1) = 4 \cdot 4 = 16$$

14. Se consideră polinomul $f = X^4 - 2X^2 + 1$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$.a) Să se arate că polinomul f este divizibil cu $g = X^2 - 1$.b) Să se calculeze produsul $S \cdot P$ unde $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ și $P = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$.c) Să se calculeze suma $T = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4$

FIȘĂ _RECAPITULARE NOȚIUNI TEORETICE ȘI EXEMPLE DE EXERCII

Clasa a XII-a _Algebră

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat)

Sugestii de rezolvare:c) se folosesc relațiile lui Viète și faptul că x_1, x_2, x_3, x_4 sunt rădăcini deci

$$\begin{cases} x_1^4 - 2x_1^2 + 1 - 0 \\ x_2^4 - 2x_2^2 + 1 - 0 \\ x_3^4 - 2x_3^2 + 1 - 0 \\ x_4^4 - 2x_4^2 + 1 - 0 \end{cases} \text{ adunăm relațiile și obținem } (x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4) - 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + 4 = 0$$

Folosim $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + \dots)$ și apoi calculăm pe T .**15.** Se consideră ecuația $x^4 - ax^3 - ax + 1 = 0$ cu soluțiile x_1, x_2, x_3, x_4 , unde $a \in \mathbb{R}$.a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$.b) Pentru $a = 1$, să se determine soluțiile reale ale ecuației.**Sugestii de rezolvare:**b) Pentru $a = 1$ se obține o ecuație reciprocă, se folosește faptul că 1 este soluție a ecuației și schema lui Horner.**Exerciții propuse spre rezolvare:****16.** Se consideră polinomul $f = X^3 - 9X^2 - X + 9$ care are rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.a) Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la $X^2 - 1$.b) Să se verifice că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 9(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 18$.c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $f(3^x) = 0$.**17.** Se consideră inelul polinoamelor $\mathbb{Z}_3[X]$.a) Pentru $g \in \mathbb{Z}_3[X]$, $g = (X + \hat{2})^2(X + \hat{1})$, să se calculeze $g(\hat{0})$.b) Dacă $f \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = X^3 + \hat{2}X$, să se arate că $f(x) = \hat{0}, \forall x \in \mathbb{Z}_3$.c) Să se determine toate polinoamele $h \in \mathbb{Z}_3[X]$, care au gradul egal cu 3 și pentru care

$$h(\hat{0}) = h(\hat{1}) = h(\hat{2}).$$