

FIȘĂ CU SUGESTII PENTRU REZOLVAREA COMPLETĂ A EXERCITIILORClasa a XI-a **Algebra**

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat, M_pedagogic)

Exercițiul 1/sub. II/varianta 9/ M_mate-info/2025

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 2a \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -a \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax + y + 2az = a + 1 \\ ax + y = 0 \\ x + y - az = -1 \end{cases}$, unde a

este număr real.

a) Arătați că $\det(A(2)) = 4$.

b) Pentru $a = 1$, arătați că sistemul de ecuații are o infinitate de soluții.

c) Determinați numărul real a , pentru care sistemul are soluția unică (x_0, y_0, z_0) și $x_0 = a$.

Rezolvare:

a. $\det(A(2)) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (2 \cdot 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot 0) - (4 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 \cdot 2)$

$$\Rightarrow \det(A(2)) = (-4 + 8 + 0) - (4 + 0 - 4) = 4 - 0 = 4, (A)$$

b. $A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = 0$ pentru că matricea are două coloane identice

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{rang } A(1) = 2$$

Matricea extinsă este $\overline{A(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, observăm

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2 \neq 0 \text{ și } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rang } \overline{A(1)} = 2$$

Prin urmare $\text{rang } A(1) = \text{rang } \overline{A(1)} = 2 < 3$, sistemul are 3 necunoscute, deci sistemul este compatibil nedeterminat (are o infinitate de soluții).

c. $\det(A(a)) = \begin{vmatrix} a & 1 & 2a \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -a \end{vmatrix} = (-a^2 + 2a^2 + 0) - (2a + 0 - a^2)$

$$\det(A(a)) = 2a^2 - 2a$$

FIȘĂ CU SUGESTII PENTRU REZOLVAREA COMPLETĂ A EXERCITIILORClasa a XI-a **Algebra**

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat, M_pedagogic)

$\det(A(a)) = 2a^2 - 2a \neq 0$ pentru $a \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$ sistemul are soluția unică (x_0, y_0, z_0) și $x_0 = a$

$$x_0 = a = \frac{dx_0}{\det(A(a))}$$

$$dx_0 = \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 2a \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -a \end{vmatrix} = (-a^2 - a + 0 + 0) - (-2a + 0 + 0) = -a^2 + a$$

$$\Rightarrow x_0 = a = \frac{dx_0}{\det(A(a))} = \frac{-a^2 + a}{2a^2 - 2a}$$

$$\Rightarrow a = \frac{-\cancel{a}(a-1)}{2\cancel{a}(a-1)} \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$$

Exercițiul 1/sub. II/varianta 1/ M_mate-info/2025

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 2-3x & 0 & x \\ 0 & 2 & 0 \\ -9x & 0 & 2+3x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a. Arătați că $\det(A(1)) = 8$.

b. Arătați că $A(x) \cdot A(y) = 2A(x+y)$, pentru orice numere reale x și y .

c. Determinați numerele reale x pentru care $(A(x) + A(3x)) \cdot A(2x) = 4A(x^2)$.

Rezolvare:

$$A(1) = \begin{pmatrix} 2-3 \cdot 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -9 \cdot 1 & 0 & 2+3 \cdot 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A(1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -9 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$a. \det(A(1)) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -9 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (-10 + 0 + 0) - (-18 + 0 + 0)$$

$$\Rightarrow \det(A(1)) = -10 + 18 = 8, (A)$$

$$A(x) \cdot A(y) = 2A(x+y)$$

$$b. \begin{pmatrix} 2-3x & 0 & x \\ 0 & 2 & 0 \\ -9x & 0 & 2+3x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2-3y & 0 & y \\ 0 & 2 & 0 \\ -9y & 0 & 2+3y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2-3(x+y) & 0 & (x+y) \\ 0 & 2 & 0 \\ -9(x+y) & 0 & 2+3(x+y) \end{pmatrix}$$

FIȘĂ CU SUGESTII PENTRU REZOLVAREA COMPLETĂ A EXERCITIILORClasa a XI-a **Algebra**

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat, M_pedagogic)

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} (2-3x)(2-3y)+0-9xy & 0+0+0 & (2-3x)y+0+x(2+3y) \\ 0+0+0 & 0+4+0 & 0+0+0 \\ -9x(2-3y)+0+(2+3x)(-9y) & 0+0+0 & -9xy+0+(2+3x)(2+3y) \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2-3x-3y & 0 & x+y \\ 0 & 2 & 0 \\ -9x-9y & 0 & 2+3x+3y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4-6x-6y+\cancel{9xy}-\cancel{9xy} & 0 & 2y-\cancel{3xy}+2x+\cancel{3xy} \\ 0 & 4 & 0 \\ -18x+\cancel{27xy}-18y-\cancel{27xy} & 4 & -\cancel{9xy}+4+6x+6y+\cancel{9xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-6x-6y & 0 & 2x+2y \\ 0 & 4 & 0 \\ -18x-18y & 0 & 4+6x+6y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4-6x-6y & 0 & 2y+2x \\ 0 & 4 & 0 \\ -18x-18y & 4 & 4+6x+6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-6x-6y & 0 & 2x+2y \\ 0 & 4 & 0 \\ -18x-18y & 0 & 4+6x+6y \end{pmatrix}, (A)$$

c. $x = ?$ a.î. $(A(x) + A(3x)) \cdot A(2x) = 4A(x^2)$

Conform b. avem $A(x) \cdot A(y) = 2A(x+y)$

$$A(x) \cdot A(2x) = 2A(3x)$$

$$A(3x)A(2x) = 2A(5x)$$

$$(A(x) + A(3x)) \cdot A(2x) = 2(A(3x) + A(5x)) = 2 \begin{pmatrix} 4-24x & 0 & 8x \\ 0 & 4 & 0 \\ -72x & 0 & 4+24x \end{pmatrix}$$

$$4 \begin{pmatrix} 2-12x & 0 & 4x \\ 0 & 2 & 0 \\ -36x & 0 & 4+24x \end{pmatrix} = 4A(4x)$$

$$\Rightarrow (A(x) + A(3x)) \cdot A(2x) = 4A(x^2) \Leftrightarrow 4A(4x) = 4A(x^2) \mid :4 \Rightarrow A(4x) = A(x^2)$$

$$\Rightarrow x^2 = 4x \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 4$$

FIȘĂ CU SUGESTII PENTRU REZOLVAREA COMPLETĂ A EXERCITIILORClasa a XI-a **Algebra**

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat, M_pedagogic)

Exercițiul 1/sub. II/varianta 3/ M_șt-nat/2025

1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x) = \begin{pmatrix} 2+2x & x \\ -x & 2-2x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a. Arătați că $\det(A(1)) = 1$.

b. Arătați că $A(2) \cdot A(1) + 3A(-2) = 16I_2$.

c. Determinați numărul întreg nenul m pentru care matricea $B(m) = \frac{1}{m} A(-m)$ este inversa matricei $A(m)$.

R: a.
$$A(1) = \begin{pmatrix} 2+2 \cdot 1 & 1 \\ -1 & 2-2 \cdot 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A(1) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A(1)) = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) = 1, (A)$$

b.

$$A(2) = \begin{pmatrix} 2+2 \cdot 2 & 2 \\ -2 & 2-2 \cdot 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A(2) = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A(2) \cdot A(1) = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24-2 & 6+0 \\ -8+2 & -2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 6 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A(-2) = \begin{pmatrix} 2+2 \cdot (-2) & -2 \\ 2 & 2-2 \cdot (-2) \end{pmatrix} \Rightarrow A(-2) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A(2) \cdot A(1) + 3A(-2) = \begin{pmatrix} 22 & 6 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 6 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ 6 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} = 16 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A(2) \cdot A(1) + 3A(-2) = 16I_2, (A)$$

c.
$$B(m) = \frac{1}{m} A(-m) = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} 2-2m & -m \\ m & 2+2m \end{pmatrix}$$

$B(m)$ este inversa matricei $A(m)$ înseamnă că

$$A(m) \cdot B(m) = B(m) \cdot A(m) = I_2$$

$$A(m) \cdot B(m) = \begin{pmatrix} 2+2m & m \\ -m & 2-2m \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{m} \begin{pmatrix} 2-2m & -m \\ m & 2+2m \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} 4-4m^2+m^2 & -2m-2m^2+2m+2m^2 \\ -2m+2m^2+2m-2m^2 & m^2+4-4m^2 \end{pmatrix}$$

FIȘĂ CU SUGESTII PENTRU REZOLVAREA COMPLETĂ A EXERCITIILORClasa a XI-a **Algebra**

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat, M_pedagogic)

$$\Rightarrow A(m) \cdot B(m) = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} 4-3m^2 & 0 \\ 0 & 4-3m^2 \end{pmatrix} = \frac{4-3m^2}{m} \cdot I_2$$

$$B(m) \cdot A(m) = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} 2-2m & -m \\ m & 2+2m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2+2m & m \\ -m & 2-2m \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} 4-4m^2+m^2 & 2m+2m^2-2m-2m^2 \\ 2m+2m^2-2m-2m^2 & m^2+4-4m^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B(m) \cdot A(m) = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} 4-3m^2 & 0 \\ 0 & 4-3m^2 \end{pmatrix} = \frac{4-3m^2}{m} \cdot I_2$$

$$A(m) \cdot B(m) = B(m) \cdot A(m) = I_2 \Rightarrow \frac{4-3m^2}{m} \cdot I_2 = I_2$$

Dar

$$\Rightarrow \frac{4-3m^2}{m} = 1 \Rightarrow 4-3m^2 = m \Rightarrow -3m^2 - m + 4 = 0$$

$$a = -3, b = -1, c = 4$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 4 = 1 + 48 = 49$$

$$m_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+7}{2 \cdot (-3)} = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3} \notin \mathbb{Z}$$

$$m_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-7}{2 \cdot (-3)} = \frac{6}{6} = 1 \in \mathbb{Z}$$

Exercițiul 1/sub. II/varianta 3/ M_tehnologic/2024

1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x) = \begin{pmatrix} 2x+1 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a. Arătați că $\det(A(1)) = 2$.

b. Arătați că $A(1) + A(5) = 2A(3)$.

c. Determinați matricea $X \in M_2(\mathbb{R})$ pentru care $X \cdot A(1) = A(3)$.

$$A(1) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A(1) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

R: a.

$$\det(A(1)) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 2, (A)$$

$$b. \quad A(5) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 5 + 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A(3) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A(1) + A(5) = 2A(3)$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 14 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, (A)$$

FIȘĂ CU SUGESTII PENTRU REZOLVAREA COMPLETĂ A EXERCITIILOR

Clasa a XI-a **Algebra**

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat, M_pedagogic)

c. Metoda 1.

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

$$\text{Fie } X \cdot A(1) = A(3) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3a+b & a+b \\ 3c+d & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3a+b=7 \\ a+b=1 \\ 3c+d=1 \\ c+d=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a+b=7 \\ a+b=1 \end{cases} \cdot (-1) \Rightarrow \begin{cases} 3a+b=7 \\ -a-b=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a=6 \\ a+b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3c+d=1 \\ c+d=3 \end{cases} \cdot (-1) \Rightarrow \begin{cases} 3c+d=1 \\ -c-d=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2c=-2 \\ c+d=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=-1 \\ d=4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Metoda 2.

$$X \cdot A(1) = A(3) \Rightarrow X = A(3) \cdot (A(1))^{-1} \text{ unde } (A(1))^{-1} \text{ este inversa matricei } A(1)$$

$$A(1) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A(1)) = 2 \neq 0$$

$$\text{matricea transpusă este } A'(1) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ calculăm matricea adjuncată}$$

$$A^*(1) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \text{ unde } A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot d_{ij} \text{ complementul algebric al elementului } a_{ij} \text{ și unde } d_{ij} \text{ este}$$

determinantul care se obține din $\det(A')$ prin eliminarea liniei i și coloanei j și se numește *minorul* elementului a_{ij} .

FIȘĂ CU SUGESTII PENTRU REZOLVAREA COMPLETĂ A EXERCITIILORClasa a XI-a **Algebra**

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat, M_pedagogic)

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 1 = 1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 1 = -1$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 1 = -1$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 3 = 3$$

$$\Rightarrow A^*(1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ deci}$$

$$(A(1))^{-1} = \frac{1}{\det(A(1))} \cdot A^*(1) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$X = A(3) \cdot (A(1))^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} - \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} + \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} + \frac{9}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercițiul 1/sub. II/varianta 4/ M_mate-info/2021

$$1. \text{ Se consideră matricea } A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 1 + \log_2 a & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ unde } a \in (0, +\infty).$$

a) Arătați că $\det(A(1)) = 1$

b) Demonstrați că, pentru orice $a \in (0, +\infty)$, matricea $A(a)$ este inversabilă.

c) Demonstrați că, pentru orice $a \in (0, +\infty)$, $\det(A(a) + (A(a))^{-1}) \geq 8$, unde $(A(a))^{-1}$ este inversa matricei $A(a)$.

$$\text{R: a) } A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 + \log_2 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1+0+0) - (0+0+0) \Rightarrow \det(A(1)) = 1, (A)$$

FIȘĂ CU SUGESTII PENTRU REZOLVAREA COMPLETĂ A EXERCITIILORClasa a XI-a **Algebra**

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat, M_pedagogic)

$$b) \det(A(a)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 1 + \log_2 a & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a + 0 + 0) - (0 + 0 + 0) \Rightarrow \det(A(a)) = a, \forall a \in (0, +\infty)$$

deci $\det(A(a)) \neq 0$ ceea ce înseamnă că matricea $A(a)$ este inversabilă.

$$c) A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 1 + \log_2 a & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A'(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 + \log_2 a \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^*(a) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = a - 0 = a \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 + \log_2 a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0 \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 + \log_2 a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0 \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 + \log_2 a \\ a & 0 \end{vmatrix} = 0 - a(1 + \log_2 a) = -a(1 + \log_2 a)$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 + \log_2 a \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0 \quad , \quad A^*(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a(1 + \log_2 a) & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} = a - 0 = a$$

$$(A(a))^{-1} = \frac{1}{\det(A(a))} \cdot A^*(a) \Rightarrow (A(a))^{-1} = \frac{1}{a} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a(1 + \log_2 a) & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ -1 - \log_2 a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A(a) + (A(a))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 1 + \log_2 a & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ -1 - \log_2 a & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & a + \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A(a) + (A(a))^{-1}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & a + \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \left(a + \frac{1}{a} \right)$$

FIȘĂ CU SUGESTII PENTRU REZOLVAREA COMPLETĂ A EXERCITIILORClasa a XI-a **Algebra**

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat, M_pedagogic)

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \quad \text{pentru că} \quad a + \frac{1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{a^2 - 2a + 1}{a} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(a-1)^2}{a} \geq 0, \forall a \in (0, +\infty)$$

$$\text{Rezultă că } \det\left(A(a) + (A(a))^{-1}\right) = 4\left(a + \frac{1}{a}\right) \geq 8, \forall a \in (0, +\infty).$$

Exercițiul 1/sub. II/varianța 4/ M_șt-nat/2021

2. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x, y) = \begin{pmatrix} x+3y & 4y \\ -2y & x-3y \end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.

a. Arătați că $\det(A(1,1)) = 0$

b. Arătați că, dacă matricea $A(x, y)$ este inversabilă, atunci $|x| \neq |y|$.

c. Determinați perechile (m, n) , de numere întregi, pentru care $A(m, n) \cdot A(-m, n) = I_2$.

$$\text{R: a. } A(1,1) = \begin{pmatrix} 1+3 \cdot 1 & 4 \cdot 1 \\ -2 \cdot 1 & 1-3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A(1,1)) = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -8 - (-8) = 0, (A)$$

$$\text{b. } A(x, y) \text{ este inversabilă deci } \det(A(x, y)) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+3y & 4y \\ -2y & x-3y \end{vmatrix} = (x^2 - 9y^2) + 8y^2 = x^2 - y^2 \neq 0$$

$$\Rightarrow x^2 \neq y^2 \Leftrightarrow |x| \neq |y|, (A)$$

$$\text{c. } A(m, n) \cdot A(-m, n) = \begin{pmatrix} m+3n & 4n \\ -2n & m-3n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -m+3n & 4n \\ -2n & -m-3n \end{pmatrix}$$

$$A(m, n) \cdot A(-m, n) = \begin{pmatrix} 9n^2 - m^2 - 8n^2 & 4mn + 12n^2 - 4nm - 12n^2 \\ 2nm - 6n^2 - 2nm + 6n^2 & -8n^2 + 9n^2 - m^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n^2 - m^2 & 0 \\ 0 & n^2 - m^2 \end{pmatrix} = (n^2 - m^2) \cdot I_2$$

$$\text{Dar } A(m, n) \cdot A(-m, n) = I_2 \Leftrightarrow n^2 - m^2 = 1 \Leftrightarrow (n-m)(n+m) = 1$$

Numerele m și n sunt întregi deci perechile posibile sunt $(0,1)$ și $(0,-1)$.

FIȘĂ CU SUGESTII PENTRU REZOLVAREA COMPLETĂ A EXERCITIILORClasa a XI-a **Algebra**

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat, M_pedagogic)

Exercițiul 1/sub. II/varianta 2/ M_mate-info/2013

1. Se consideră determinantul $D(a,b) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \end{vmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.

a) Arătați că $D(2,3) = 2$.

b) Verificați dacă $D(a,b) = (a-1)(b-1)(b-a)$, pentru orice numere reale a și b .

c) În reperul cartezian xOy se consideră punctele $P(n, n^2)$, unde n este un număr natural nenul. Determinați numărul natural $n, n \geq 3$, pentru care aria triunghiului $P_1P_2P_n$ este egală cu 1.

R:

$$a) \quad D(2,3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2^2 & 1 \\ 3 & 3^2 & 1 \end{vmatrix} = (4+18+3) - (12+9+2)$$

$$D(2,3) = 25 - 23 = 2, (A)$$

$$D(a,b) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \end{vmatrix} = (a^2 + ab^2 + b) - (a^2b + b^2 + a)$$

$$D(a,b) = a^2 + ab^2 + b - a^2b - b^2 - a$$

$$b) \quad D(a,b) = (a^2 - b^2) + (b - a) + ab(b - a)$$

$$D(a,b) = (a - b)(a + b) + (b - a)(1 + ab)$$

$$D(a,b) = (b - a)(-a - b + 1 + ab) = (b - a)(a(b - 1) - (b - 1))$$

$$\Rightarrow D(a,b) = (b - a)(b - 1)(a - 1), (A)$$

c) - aria triunghiului $P_1P_2P_n$, unde $P_1(1;1), P_2(2;4), P_n(n; n^2)$, este

$$A_{(P_1P_2P_n)} = \frac{1}{2} \cdot |\Delta| \quad \text{unde} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ n & n^2 & 1 \end{vmatrix} = (4 + 2n^2 + n) - (4n + n^2 + 2) = n^2 - 3n + 2.$$

$$A_{(P_1P_2P_n)} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot |\Delta| = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} |n^2 - 3n + 2| = 1$$

$$n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \Rightarrow n^2 - 3n + 2 = 2 \Rightarrow n^2 - 3n = 0$$

$$\Rightarrow n_1 = 0, n_2 = 3$$

$$n_1 = 0 \text{ nu convine, rezultă că soluția este } n_2 = 3$$

FIȘĂ CU SUGESTII PENTRU REZOLVAREA COMPLETĂ A EXERCITIILORClasa a XI-a **Algebra**

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat, M_pedagogic)

Sub. III/varianta 1/ M_pedagogic/2025

Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $M(x) = \begin{pmatrix} 2 & 3x \\ x & 2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

1. Arătați că $\det(M(1)) = 1$.
2. Arătați că $M(1) + 2M(4) = 3M(3)$.
3. Determinați numărul real a pentru care $M(2) \cdot M(-2) = aI_2$.
4. Determinați numerele reale x pentru care $\det(M(x) + M(-2x)) = 4$.
5. Determinați numerele reale x și y pentru care $M(x) \cdot M(-1) + M(y) = 12M(-1)$.
6. Demonstrați că numărul natural $N = \det(2M(1) + nI_2)$ este multiplu de 4, pentru orice număr natural n .

Rezolvare:

$$1. \quad M(1) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \cdot 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det(M(1)) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 \Rightarrow \det(M(1)) = 4 - 3 = 1, (A)$$

$$2. \quad M(1) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad M(4) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \cdot 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad M(3) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \cdot 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M(1) + 2M(4) = 3M(3)?$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 24 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 27 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 27 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 27 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}, (A)$$

$$3. \quad M(2) = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad M(-2) = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M(2) \cdot M(-2) = aI_2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 6 \cdot (-2) & 2 \cdot (-6) + 6 \cdot 2 \\ 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) & 2 \cdot (-6) + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \Rightarrow a = -8$$

FIȘĂ CU SUGESTII PENTRU REZOLVAREA COMPLETĂ A EXERCITIILORClasa a XI-a **Algebra**

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat, M_pedagogic)

$$4. \quad M(x) + M(-2x) = \begin{pmatrix} 2 & 3x \\ x & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -6x \\ -2x & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3x \\ -x & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(M(x) + M(-2x)) = \begin{vmatrix} 4 & -3x \\ -x & 4 \end{vmatrix} = 16 - (-3x) \cdot (-x) = 16 - 3x^2$$

$$\det(M(x) + M(-2x)) = 4 \Leftrightarrow 16 - 3x^2 = 4$$

$$\Rightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = 2 \in \mathbb{R}, x_2 = -2 \in \mathbb{R}$$

$$5. \quad M(-1) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, M(y) = \begin{pmatrix} 2 & 3y \\ y & 2 \end{pmatrix}$$

$$M(x) \cdot M(-1) + M(y) = 12M(-1)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3x \\ x & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3y \\ y & 2 \end{pmatrix} = 12 \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4-3x & -6+6x \\ 2x-2 & -3x+4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3y \\ y & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & -36 \\ -12 & 24 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6-3x & -6+6x+3y \\ 2x-2+y & -3x+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & -36 \\ -12 & 24 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 6-3x=24 \\ -6+6x+3y=-36 \\ 2x-2+y=-12 \\ -3x+6=24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x=18 \\ 2x+y-2=-12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-6 \\ y=2 \end{cases}$$

$$6. \quad N = \det(2M(1) + nI_2)$$

$$2M(1) + nI_2 = 2 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 2M(1) + nI_2 = \begin{pmatrix} 4+n & 6 \\ 2 & 4+n \end{pmatrix}$$

$$N = \det(2M(1) + nI_2) = \begin{vmatrix} 4+n & 6 \\ 2 & 4+n \end{vmatrix} = (4+n)^2 - 12$$

$$\Rightarrow N = 16 + 8n + n^2 - 12 = 4 + 8n + n^2$$

$$n \text{ este număr natural par adică } n = 2k, k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow N = 4 + 8 \cdot 2k + (2k)^2 \Leftrightarrow N = 4 + 16k + 4k^2$$

$$\Leftrightarrow N = 4(1 + 4k + k^2) \Rightarrow N : 4$$