

FIȘĂ _ REZOLVAREA COMPLETĂ A DIFERITELOR TIPURI DE EXERCITIIClasa a XII-a **Algebră_Legi de compoziție**

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică_bacalaureat (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat)

Exercițiul 2/sub. II/varianta 1/ M_șt-nat/2025

2. Pe mulțimea $M = [0, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x * y = x + y - \sqrt{xy}$.

a) Arătați că $1 * 4 = 3$.

b) Determinați $x \in M$ pentru care $x * (9x) = x^2$.

c) Determinați numărul real x pentru care $2^x * 2^{x+2} = 6^x$.

Rezolvare:

a) $1 * 4 = 1 + 4 - \sqrt{1 \cdot 4} \Leftrightarrow 1 * 4 = 1 + 4 - 2 = 3, (A)$

$$x * (9x) = x^2$$

$$x + 9x - \sqrt{x \cdot 9x} = x^2 \Leftrightarrow 10x - 3x = x^2$$

b) $x^2 - 7x = 0 \Leftrightarrow x(x - 7) = 0$

$$x = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \in M$$

$$x - 7 = 0 \Rightarrow x_2 = 7 \in M$$

c) $2^x * 2^{x+2} = 6^x, x \in \mathbb{R}$

$$2^x + 2^{x+2} - \sqrt{2^x \cdot 2^{x+2}} = 6^x$$

$$2^x + 2^x \cdot 2^2 - \sqrt{2^{2x} \cdot 2^2} = 6^x$$

$$5 \cdot 2^x - 2 \cdot 2^x = 2^x \cdot 3^x \Leftrightarrow 2^x \cdot 3^x - 3 \cdot 2^x = 0$$

$$2^x (3^x - 3) = 0 \Rightarrow 3^x - 3 = 0 \Leftrightarrow 3^x = 3 \Rightarrow x = 1 \in \mathbb{R}$$

Exercițiul 2/sub. II/varianta 1/ M_mate-info /2020

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = \log_2 (2^x + 2^y)$.

a) Arătați că $0 * 0 = 1$.

b) Demonstrați că legea de compoziție „*” este comutativă.

c) Determinați numărul real x pentru care $(x * x) * x = 3 + \log_2 3$,

Rezolvare:

a) $0 * 0 = \log_2 (2^0 + 2^0) \Leftrightarrow 0 * 0 = \log_2 (1 + 1) \Leftrightarrow 0 * 0 = \log_2 2 = 1, (A)$

b) $C : x * y = y * x, \forall x, y \in \mathbb{R}$

FIȘĂ _ REZOLVAREA COMPLETĂ A DIFERITELOR TIPURI DE EXERCIIClasa a XII-a **Algebră Legi de compoziție**

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică_bacalaureat (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat)

$$\left. \begin{array}{l} x * y = \log_2 (2^x + 2^y) \\ y * x = \log_2 (2^y + 2^x) \\ \text{"+" , comutativa} \end{array} \right\} \Rightarrow x * y = y * x, \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ deci legea "}" \text{ este comutativă}$$

$$(x * x) * x = 3 + \log_2 3 \Leftrightarrow (\log_2 (2^x + 2^x)) * x = 3 + \log_2 3$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 (2^{x+1})) * x = 3 + \log_2 3 \Leftrightarrow (x+1) * x = 3 + \log_2 3$$

$$c) \Leftrightarrow \log_2 (2^{x+1} + 2^x) = 3 + \log_2 3 \Leftrightarrow \log_2 (3 \cdot 2^x) = 3 + \log_2 3$$

$$\Leftrightarrow \log_2 3 + \underbrace{\log_2 2^x}_{x \cdot \log_2 2} = 3 + \log_2 3 \Leftrightarrow x = 3 \in \mathbb{R}$$

Exercițiul 2/sub. II/varianta 1/ M_șt-nat /2020

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = \frac{x + y + 1}{x^2 + y^2 + 1}$.

a) Arătați că $0 * 1 = 1$.

b) Determinați numerele reale x pentru care $x * x = 1$.

c) Demonstrați că $x * (-x) \leq 1$, pentru orice număr real x .

Rezolvare:

$$a) \quad 0 * 1 = \frac{0+1+1}{0^2+1^2+1} \Leftrightarrow 0 * 1 = \frac{2}{2} \Leftrightarrow 0 * 1 = 1, (A)$$

$$x * x = 1 \Leftrightarrow \frac{x+x+1}{x^2+x^2+1} = 1 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{2x^2+1} = 1 \Rightarrow 2x+1 = 2x^2+1$$

$$b) \Rightarrow 2x = 2x^2 \mid :2 \Rightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \in \mathbb{R}$$

$$x-1 = 0 \Rightarrow x_2 = 1 \in \mathbb{R}$$

c)

$$x * (-x) \leq 1$$

$$\frac{x+(-x)+1}{x^2+(-x)^2+1} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2x^2+1} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1-2x^2-1}{2x^2+1} \leq 0 \Leftrightarrow -\underbrace{\frac{2x^2}{2x^2+1}}_{\geq 0} \leq 0, (A), \forall x \in \mathbb{R}$$

FIȘĂ _ REZOLVAREA COMPLETĂ A DIFERITELOR TIPURI DE EXERCIIClasa a XII-a **Algebră_Legi de compoziție**

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică_bacalaureat (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat)

Exercițiul 2/sub. II/varianta 1/ M_tehnologic /2019

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = 2(x + y) - \frac{xy}{2}$.

a) Arătați că $2 \circ (-2) = 2$.

b) Determinați numărul natural nenul n pentru care $n \circ \frac{1}{n} = \frac{9}{2}$.

c) Determinați numărul real y pentru care $x \circ y = 8$, pentru orice număr real x .

Rezolvare:

$$a) \quad 2 \circ (-2) = 2(2 + (-2)) - \frac{2 \cdot (-2)}{2} \Leftrightarrow 2 \circ (-2) = 2 \underbrace{(2 + (-2))}_0 + 2 \Leftrightarrow 2 \circ (-2) = 2, (A)$$

$$b) \quad n \in \mathbb{N}^* ? \text{ Pentru care } n \circ \frac{1}{n} = \frac{9}{2}$$

$$n \circ \frac{1}{n} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow 2 \left(n + \frac{1}{n} \right) - \frac{\cancel{n} \cdot \frac{1}{\cancel{n}}}{2} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{2(n^2 + 1)}{n} = \frac{\cancel{10}^5}{\cancel{2}}$$

$$\Rightarrow 2n^2 + 2 = 5n \Leftrightarrow 2n^2 - 5n + 2 = 0$$

$$\begin{array}{lll} a = 2, b = -5, c = 2 & n_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} & n_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \Delta = b^2 - 4ac & n_1 = \frac{5+3}{2 \cdot 2} & n_2 = \frac{5-3}{2 \cdot 2} \\ \Delta = 25 - 16 & & \Rightarrow S = \{2\} \\ \Delta = 9 & n_1 = \frac{8}{4} = 2 \in \mathbb{N}^* & n_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}^* \end{array}$$

$$x \circ y = 8 \Leftrightarrow 2(x + y) - \frac{xy}{2} = 8 \quad \Big| \cdot 2$$

$$c) \quad 4x + 4y - xy = 16$$

$$4y - xy = -4x + 16$$

$$y(4 - x) = 4(-x + 4) \Rightarrow y = 4, \forall x \in \mathbb{R}$$

FIȘĂ _ REZOLVAREA COMPLETĂ A DIFERITELOR TIPURI DE EXERCITIIClasa a XII-a **_Algebră_Legi de compoziție**

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică_bacalaureat (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat)

Exercițiul 2/sub. II/varianta 2/ M_mate-info /2016

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă

$$x \circ y = 3xy + 3x + 3y + 2.$$

a) Arătați că $x \circ y = 3(x+1)(y+1) - 1$, pentru orice numere reale x și y .b) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x + 3$. Demonstrați că $f(x \circ y) = f(x)f(y)$, pentru orice numere reale x și y .c) Determinați numerele reale a , pentru care $\underbrace{a \circ a \circ \dots \circ a}_{\text{de 2016 ori}} = 3^{2015} - 1$

Rezolvare:

a) **Metoda 1.**

$$x \circ y = 3(x+1)(y+1) - 1$$

$$3xy + 3x + 3y + 2 = 3(xy + x + y + 1) - 1$$

$$3xy + 3x + 3y + 2 = 3xy + 3x + 3y + 2, (A)$$

Metoda 2.

$$x \circ y = 3xy + 3x + 3y + 2 \Leftrightarrow x \circ y = 3xy + 3x + 3y + 3 - 1$$

$$\Leftrightarrow x \circ y = 3x(y+1) + 3(y+1) - 1 \Leftrightarrow x \circ y = 3(x+1)(y+1) - 1, (A)$$

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x + 3$

$$f(x \circ y) = 3(x \circ y) + 3$$

$$f(x \circ y) = 3(3(x+1)(y+1) - 1) + 3$$

$$f(x \circ y) = 9(x+1)(y+1) - 3 + 3$$

$$f(x \circ y) = 9(x+1)(y+1), (1)$$

$$f(x)f(y) = (3x+3)(3y+3)$$

$$f(x)f(y) = 3(x+1) \cdot 3(y+1)$$

$$f(x)f(y) = 9(x+1)(y+1), (2)$$

Din (1) și (2) rezultă că $f(x \circ y) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$ c) $\underbrace{a \circ a \circ \dots \circ a}_{\text{de 2016 ori}} = 3^{2015} - 1, a = ?, a \in \mathbb{R}$

FIȘĂ _ REZOLVAREA COMPLETĂ A DIFERITELOR TIPURI DE EXERCIIClasa a XII-a **Algebră_Legi de compoziție**

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică_bacalaureat (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat)

Metoda 1.

$$a \circ a = 3(a+1)(a+1) - 1$$

$$a \circ a = 3(a+1)^2 - 1$$

$$a \circ a \circ a = (3(a+1)^2 - 1) \circ a = 3(3(a+1)^2 - 1)(a+1) - 1$$

$$a \circ a \circ a = 3^2(a+1)^3 - 1$$

$$\vdots$$

$$\underbrace{a \circ a \circ a \circ \dots \circ a}_{de 2016 ori} = 3^{2015}(a+1)^{2016} - 1$$

$$\underbrace{a \circ a \circ \dots \circ a}_{de 2016 ori} = 3^{2015} - 1$$

$$3^{2015}(a+1)^{2016} - 1 = 3^{2015} - 1$$

$$\Rightarrow (a+1)^{2016} = 1$$

$$a+1 = 1 \Rightarrow a_1 = 0 \in \mathbb{R}$$

$$a+1 = -1 \Rightarrow a_2 = -2 \in \mathbb{R}$$

Metoda 2.

$$f\left(\underbrace{a \circ a \circ \dots \circ a}_{de 2016 ori}\right) = f(3^{2015} - 1)$$

$$(f(a))^{2016} = 3(3^{2015} - 1) + 3$$

$$x * y = \frac{xy}{1 + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}} \quad (f(a))^{2016} = 3^{2016}$$

$$f(a) = 3 \Leftrightarrow 3a + 3 = 3 \Rightarrow 3a = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \in \mathbb{R}$$

$$f(a) = -3 \Leftrightarrow 3a + 3 = -3 \Rightarrow 3a = -6 \Rightarrow a_2 = -2 \in \mathbb{R}$$

Exercițiul 2/sub. II/simulare/ M_mate-info /2023

2. Pe mulțimea $M = [-1, 1]$ se definește legea de compoziție $x * y = \frac{xy}{1 + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}$.

a) Arătați că $1 * \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

b) Arătați că $x * (-x) \geq -x^2$, pentru orice $x \in M$.

c) Determinați perechile (a, b) de numere din mulțimea M pentru care $a * b = 1$.

Rezolvare:

$$a) \quad 1 * \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{1 + \sqrt{\underbrace{(1-1^2)}_0} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)} \Leftrightarrow 1 * \frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{1} \Leftrightarrow 1 * \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, (A)$$

FIȘĂ _ REZOLVAREA COMPLETĂ A DIFERITELOR TIPURI DE EXERCITIIClasa a XII-a **Algebră Legi de compoziție**

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică_bacalaureat (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat)

b)

$$x * (-x) \geq -x^2 \Leftrightarrow \frac{x \cdot (-x)}{1 + \sqrt{(1-x^2)(1-(-x)^2)}} \geq -x^2 \Leftrightarrow \frac{-x^2}{1 + \sqrt{(1-x^2)(1-x^2)}} \geq -x^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2}{2-x^2} + x^2 \geq 0, \Leftrightarrow \frac{-x^2 + 2x^2 - x^4}{2-x^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2(1-x^2)}{2-x^2} \geq 0, (A), \forall x \in M$$

$$a * b = 1 \Leftrightarrow \frac{ab}{1 + \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}} = 1 \Rightarrow ab = 1 + \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \Leftrightarrow ab - 1 = \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}$$

c)

$$\Rightarrow ab - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} ab \geq 1 \\ a, b \in [-1, 1] \end{array} \right\} \Rightarrow (a, b) = (-1, -1), (a, b) = (1, 1)$$

Exercițiul 2/sub. II/test de antrenament nr. 4/ M_tehnologic /2021

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă

$$x * y = (2x - 1)(2y - 1) + \frac{1}{2}.$$

a) Arătați că $2 * \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$

b) Determinați numărul real x pentru care $(4x) * \frac{1}{4} = 25.$

c) Calculați $1 * \frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \frac{1}{4} * \frac{1}{5}.$

Rezolvare:

$$a) \quad 2 * \frac{1}{2} = (2 \cdot 2 - 1) \underbrace{\left(2 \cdot \frac{1}{2} - 1 \right)}_0 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 * \frac{1}{2} = 3 \underbrace{\left(2 \cdot \frac{1}{2} - 1 \right)}_0 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 * \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, (A)$$

$$(4x) * \frac{1}{4} = 25 \Leftrightarrow (2 \cdot 4x - 1) \left(\cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{4}_2} - 1 \right) + \frac{1}{2} = 25 \Leftrightarrow (8x - 1) \left(-\frac{1}{2} \right) = 25 - \frac{1}{2}$$

b)

$$\frac{1-8x}{2} = \frac{49}{2} \Big| : 2 \Rightarrow -8x = 48 \Big| : (-8) \Rightarrow x = -6 \in \mathbb{R}$$

FIȘĂ _ REZOLVAREA COMPLETĂ A DIFERITELOR TIPURI DE EXERCIIClasa a XII-a **Algebră_Legi de compoziție**

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică_bacalaureat (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat)

$$c) \quad 1 * \frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \frac{1}{4} * \frac{1}{5} = ? \quad \text{Observăm că: } \frac{1}{2} * y = \underbrace{\left(2 \cdot \frac{1}{2} - 1\right)}_0 (2y - 1) + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} * y = \frac{1}{2}, \forall y \in \mathbb{R} \text{ și}$$

$$x * \frac{1}{2} = (2x - 1) \underbrace{\left(2 \cdot \frac{1}{2} - 1\right)}_0 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x * \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{deci } \left(1 * \frac{1}{2}\right) * \left(\frac{1}{3} * \frac{1}{4} * \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{2} * \left(\frac{1}{3} * \frac{1}{4} * \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{2}$$

Exercițiul 2/sub. II/test de antrenament nr. 8/ M_șt-nat/2021

2. Pe mulțimea $A = (0, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x \circ y = \frac{2x}{y} + \frac{2y}{x}$.

a) Arătați că numărul $a = 2 \circ 4$ este întreg.

b) Arătați că $x \circ y \geq 4$, pentru orice $x, y \in A$.

c) Arătați că legea de compoziție „ $\circ$ ” **nu** admite element neutru.

Rezolvare:

$$a) \quad a = 2 \circ 4 \Leftrightarrow a = \frac{2 \cdot 2}{4} + \frac{2 \cdot 4}{2} \Leftrightarrow a = 1 + 4 = 5 \in \mathbb{Z}$$

$$b) \quad x \circ y \geq 4 \Leftrightarrow \overset{x)}{\frac{2x}{y}} + \overset{y)}{\frac{2y}{x}} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{2(x^2 + y^2)}{xy} - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2(x^2 + y^2 - 2xy)}{xy} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x - y)^2}{xy} \geq 0, (A), \forall x, y \in (0, +\infty)$$

c) $\exists ? e \in A$ astfel încât $x \circ e = e \circ x = x, \forall x \in A$, dacă ar exista e atunci

$$e \circ e = e \Leftrightarrow \frac{2e}{e} + \frac{2e}{e} = e \Rightarrow e = 4 \in A \text{ dar conform a) } a = 2 \circ 4 = 5 \neq 2 \text{ deci } e = 4 \text{ nu este}$$

element neutru, prin urmare nu există element neutru față de legea „ $\circ$ ”.