

FIȘĂ _ REZOLVAREA COMPLETĂ A DIFERITELOR TIPURI DE EXERCITIIClasa a XII-a **_Algebră_Legi de compoziție**

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică_bacalaureat (M_pedagogic)

Subiectul II / varianta 9 / M_pedagogic/ 2025

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă

$$x * y = xy + 90 - 9x - 9y.$$

1. Arătați că $0 * 9 = 9$.
2. Arătați că $x * y = (x - 9)(y - 9) + 9$, pentru orice numere reale x și y .
3. Arătați că $e = 10$ este elementul neutru al legii de compoziție $*$.
4. Determinați simetricul numărului $\frac{26}{3}$ în raport cu legea de compoziție $*$.
5. Calculați $3^0 * 3^1 * 3^2 * 3^3 * 3^4$.
6. Determinați numerele naturale de forma $\overline{ab}$ pentru care $a * b = 12$.

Rezolvare:

$$1. \quad 0 * 9 = 0 \cdot 9 + 90 - 9 \cdot 0 - 9 \cdot 9 \Leftrightarrow 0 * 9 = 90 - 81 \Leftrightarrow 0 * 9 = 9, (A)$$

2. Metoda 1.

$$x * y = (x - 9)(y - 9) + 9$$

$$xy + 90 - 9x - 9y = xy - 9x - 9y + 81 + 9$$

$$xy + 90 - 9x - 9y = xy + 90 - 9x - 9y, (A)$$

Metoda 2.

$$x * y = xy + 90 - 9x - 9y$$

$$x * y = xy - 9x - 9y + 81 + 9$$

$$x * y = x(y - 9) - 9(y - 9) + 9$$

$$x * y = (x - 9)(y - 9) + 9, (A)$$

$$3. \quad e = 10 \text{ este elementul neutru al legii de compoziție } "*" \Leftrightarrow e * x = x * e = x, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$e * x = x?$$

$$x * e = x?$$

$$10 * x = 10 \cdot x + 90 - 9 \cdot 10 - 9 \cdot x$$

$$x * 10 = x \cdot 10 + 90 - 9 \cdot x - 9 \cdot 10$$

$$10 * x = x + 90 - 90$$

$$x * 10 = x + 90 - 90$$

$$10 * x = x, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$x * 10 = x, \forall x \in \mathbb{R}$$

Rezultă că $e = 10$ este elementul neutru al legii de compoziție $*$.

$$4. \quad \text{simetricul numărului } x = \frac{26}{3} \text{ în raport cu legea de compoziție } "*" \text{ este } x'$$

$$x' \text{ este simetricul lui } x \Leftrightarrow x * x' = x' * x = e$$

FIȘĂ _ REZOLVAREA COMPLETĂ A DIFERITELOR TIPURI DE EXERCITIIClasa a XII-a **Algebră Legi de compoziție**

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică_bacalaureat (M_pedagogic)

$$x' * \frac{26}{3} = 10$$

$$\frac{26}{3} * x' = 10$$

$$(x' - 9) \left(\frac{26}{3} - 9 \right) + 9 = 10$$

$$\left(\frac{26}{3} - 9 \right) (x' - 9) + 9 = 10$$

$$(x' - 9) \left(-\frac{1}{3} \right) = 1$$

$$\left(-\frac{1}{3} \right) (x' - 9) = 1$$

$$x' - 9 = -3$$

$$x' - 9 = -3$$

$$x' = 6 \in \mathbb{R}$$

$$x' = 6 \in \mathbb{R}$$

Deci $x' = 6$. Am folosit relația de la punctul 2.

5.

$$x = 3^2 = 9 \Rightarrow \underbrace{(3^2 - 9)}_0 (y - 9) + 9 = 9, \forall y \in \mathbb{R}$$

Observăm că

$$y = 3^2 = 9 \Rightarrow (x - 9) \underbrace{(3^2 - 9)}_0 + 9 = 9, \forall x \in \mathbb{R}$$

deci $3^2 = 9$ este punct fix

$$\text{Deci } \underbrace{3^0 * 3^1 * 3^2}_{3^2} * 3^3 * 3^4 = 3^2 * 3^3 * 3^4 = 3^2 = 9$$

6. $\overline{ab} = ?, \overline{ab} \in \mathbb{N}$ pentru care $a * b = 12$ a, b sunt cifre $a, b \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ și $a \neq 0$

$$a * b = 12 \Leftrightarrow (a - 9)(b - 9) + 9 = 12$$

$$(a - 9)(b - 9) = 3$$

$$\text{Varianta 1. } \begin{matrix} a - 9 = 1, b - 9 = 3 \\ a = 10, b = 12 \end{matrix}$$

sau invers $a = 12, b = 10$, nu convine pentru că a, b suntcifre și $a \neq 0$

$$\text{Varianta 2. } \begin{matrix} a - 9 = -1, b - 9 = -3 \\ a = 8, b = 6 \end{matrix}$$

sau invers $a = 6, b = 8$

Deci numerele sunt 86 și 68.

Subiectul II / varianta 1 / M_pedagogic/ 2025Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy - 6(x + y) + 14$.1. Arătați că $0 * 2 = 2$.2. Arătați că legea de compoziție „ $*$ ” este comutativă.3. Determinați numărul real x pentru care $x * 4 = 4$.4. Determinați perechile (m, n) de numere naturale, cu $m < n$, pentru care

$$(-m) * (-n) = (m * n) + 36.$$

$$(3^x)^2 = 3 \Rightarrow 3^{2x} = 3 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$$

FIȘĂ _ REZOLVAREA COMPLETĂ A DIFERITELOR TIPURI DE EXERCITIIClasa a XII-a **Algebră_Legi de compoziție**

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică_bacalaureat (M_pedagogic)

$$6. \quad x * \frac{1}{x} \leq 3?$$

$$x * \frac{1}{x} \leq 3$$

$$x * \frac{1}{x} = x \cdot \frac{1}{x} - 6 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 14$$

$$-\frac{6(x^2+1)}{x} + 15 \leq 3$$

$$x * \frac{1}{x} = -\frac{6(x^2+1)}{x} + 15$$

$$-\frac{6(x^2+1)}{x} \leq -12 \left| :(-6) \Rightarrow \frac{x^2+1}{x} \geq 2 \right. \left. \begin{matrix} x \in (0, +\infty) \end{matrix} \right\} \Rightarrow x^2 + 1 \geq 2x \Rightarrow$$

$$x^2 + 1 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0, (A), \forall x \in (0, +\infty)$$

Subiectul II / varianta 10 / M_pedagogic/ 2017Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy + 7(x + y) + 42$.

1. Arătați că $\sqrt{2} * (-\sqrt{2}) = 40$.
2. Arătați că $x * y = (x + 7)(y + 7) - 7$, pentru orice numere reale x și y .
3. Verificați dacă $e = -6$ este element neutru al legii de compoziție „*”.
4. Determinați numărul real a pentru care $2 * a = 65$.
5. Determinați numerele reale $x, x > 0$ pentru care $(\log_2 x) * (\log_2 x) = 42$.
6. Determinați numerele întregi m pentru care $m * (2 - m) \geq 57$.

Rezolvare:

$$1. \quad \sqrt{2} * (-\sqrt{2}) = \sqrt{2} \cdot (-\sqrt{2}) + 7 \underbrace{\left(\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) \right)}_{=0} + 42 \Leftrightarrow \sqrt{2} * (-\sqrt{2}) = -2 + 42$$

$$\sqrt{2} * (-\sqrt{2}) = 40, (A)$$

2. Metoda 1.

$$x * y = (x + 7)(y + 7) - 7$$

$$xy + 7(x + y) + 42 = xy + 7x + 7y + 49 - 7$$

$$xy + 7x + 7y + 42 = xy + 7x + 7y + 42, (A)$$

Metoda 2.

$$x * y = xy + 7(x + y) + 42 \Leftrightarrow x * y = xy + 7x + 7y + 49 - 7$$

$$\Leftrightarrow x * y = x(y + 7) + (y + 7) - 7 \Leftrightarrow x * y = (x + 7)(y + 7) - 7, (A)$$

FIȘĂ _ REZOLVAREA COMPLETĂ A DIFERITELOR TIPURI DE EXERCITIIClasa a XII-a _ **Algebră_Legi de compoziție**

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică_bacalaureat (M_pedagogic)

3. $e = -6$ este element neutru al legii de compoziție „*” $\Leftrightarrow x * e = e * x = x, \forall x \in \mathbb{R}$

$$x * e = x$$

$$e * x = x$$

$$x * (-6) = x$$

$$(-6) * x = x$$

$$x \cdot (-6) + 7(x + (-6)) + 42 = x \quad (-6) \cdot x + 7((-6) + x) + 42 = x$$

$$-6x + 7x - 42 + 42 = x$$

$$-6x - 42 + 7x + 42 = x$$

$$x = x, (A), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$x = x, (A), \forall x \in \mathbb{R}$$

deci $e = -6$ este element neutru al legii de compoziție „*”

$$4. \quad 2 * a = 65 \Leftrightarrow 2a + 7(2 + a) + 42 = 65 \Leftrightarrow 9a + 56 = 65$$

$$\Leftrightarrow 9a = 9 \Rightarrow a = 1 \in \mathbb{R}$$

$$5. \quad x, x > 0? \text{ a.î. } (\log_2 x) * (\log_2 x) = 42$$

$$(\log_2 x) * (\log_2 x) = 42 \Leftrightarrow (\log_2 x + 7)(\log_2 x + 7) - 7 = 42$$

$$(\log_2 x + 7)^2 - 7 = 42 \Leftrightarrow (\log_2 x + 7)^2 = 49$$

$$\Rightarrow S = \{1, 2^{-14}\}$$

$$\log_2 x + 7 = 7 \Leftrightarrow \log_2 x = 0 \Rightarrow x_1 = 1 > 0$$

$$\log_2 x + 7 = -7 \Leftrightarrow \log_2 x = -14 \Rightarrow x_2 = 2^{-14} > 0$$

$$6. \quad m * (2 - m) \geq 57, m \in \mathbb{Z}?$$

$$m * (2 - m) \geq 57 \Leftrightarrow (m + 7)(2 - m + 7) - 7 \geq 57$$

$$\Leftrightarrow -m^2 + 9m + 63 - 7m - 7 - 57 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -m^2 + 2m - 1 \geq 0 \Leftrightarrow -(m - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow \underbrace{(m - 1)^2}_{\geq 0} \leq 0 \Rightarrow m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1 \in \mathbb{Z}$$