

FIȘĂ _ REZOLVAREA COMPLETĂ A DIFERITELOR TIPURI DE EXERCITIIClasa a XII-a **Algebră_Polinoame**

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică_bacalaureat (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat)

Exercițiul 2/sub. II/varianta 9/ M_mate-info/2025

2. Se consideră polinomul $f = X^4 - 3X^3 + X^2 - 2X + m$, unde m este număr real.

a) Pentru $m = 3$, arătați că $f(1) = 0$.

b) Determinați numerele reale m pentru care $(x_1 x_2 x_3 x_4)^2 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1$, unde x_1, x_2, x_3, x_4 sunt rădăcinile polinomului f .

c) Pentru $m = 0$, determinați numerele reale a pentru care restul împărțirii polinomului f la polinomul $X - a$ este egal cu a .

Rezolvare:

a) $m = 3 \Rightarrow f = X^4 - 3X^3 + X^2 - 2X + 3$

$$f(1) = 1^4 - 3 \cdot 1^3 + 1^2 - 2 \cdot 1 + 3$$

$$f(1) = 1 - 3 + 1 - 2 + 3$$

$$f(1) = 2 - 2$$

$$f(1) = 0, (A)$$

b) $f = X^4 - 3X^3 + X^2 - 2X + m$, x_1, x_2, x_3, x_4 sunt rădăcinile polinomului f

Scriem relațiile lui Viète:

$$a_4 = 1, a_3 = -3, a_2 = 1, a_1 = -2, a_0 = m$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{a_3}{a_4} = -\frac{-3}{1} = 3 \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 = \frac{a_2}{a_4} = \frac{1}{1} = 1 \\ x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 = -\frac{a_1}{a_4} = -\frac{-2}{1} = 2 \\ x_1 x_2 x_3 x_4 = \frac{a_0}{a_4} = \frac{m}{1} = m \end{cases}$$

$$(x_1 x_2 x_3 x_4)^2 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1$$

$$m^2 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 1$$

$$m^2 - 3 = 1 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m_1 = 2 \in \mathbb{R}, m_2 = -2 \in \mathbb{R}$$

c) $m = 0 \Rightarrow f = X^4 - 3X^3 + X^2 - 2X$

FIȘĂ _ REZOLVAREA COMPLETĂ A DIFERITELOR TIPURI DE EXERCITIIClasa a XII-a **Algebră Polinoame**

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică_bacalaureat (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat)

restul împărțirii polinomului f la polinomul $X - a$ este egal cu $a \Leftrightarrow f(a) = a$

$$\Leftrightarrow a^4 - 3a^3 + a^2 - 2a = a$$

$$a^4 - 3a^3 + a^2 - 3a = 0$$

$$a^3(a-3) + a(a-3) = 0 \Leftrightarrow (a-3)a(a^2+1) = 0$$

$$\Rightarrow a-3=0 \Rightarrow a_1=3 \in \mathbb{R}$$

$$a=0 \Rightarrow a_2=0 \in \mathbb{R}$$

$$a^2+1 \neq 0$$

Exercițiul 2/sub. II/varianta 9/ M_tehnologic/20252. Se consideră polinomul $f = X^3 + mX^2 - X - m$, unde m este număr real.a) Arătați că $f(1) = 0$, pentru orice număr real m .b) Pentru $m = -3$, arătați că 3 este rădăcină a polinomului f .c) Determinați numărul real m pentru care $(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)^2 + x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) = 1$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f .

Rezolvare:

$$a) \quad f(1) = 1^3 + m \cdot 1^2 - 1 - m \Leftrightarrow f(1) = 1 + m - 1 - m \Leftrightarrow f(1) = 0, (\forall m) \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f = X^3 - 3X^2 - X + 3 \Leftrightarrow f = X^2(X-3) - (X-3)$$

$$b) \quad m = -3 \quad \Leftrightarrow f = (X-3)(X^2-1)$$

$$f(3) = (3-3)(3^2-1) \Leftrightarrow f(3) = 0 \cdot 8 = 0 \text{ rezultă că } 3 \text{ este rădăcină a polinomului } f$$

$$c) \quad f = X^3 + mX^2 - X - m, \quad x_1, x_2, x_3 \text{ sunt rădăcinile polinomului } f$$

Scriem relațiile lui Viète:

$$a_3 = 1, a_2 = m, a_1 = -1, a_0 = -m$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3} = -\frac{m}{1} = -m \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{a_1}{a_3} = \frac{-1}{1} = -1 \\ x_1x_2x_3 = -\frac{a_0}{a_3} = -\frac{-m}{1} = m \end{cases} \quad \begin{cases} (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)^2 + x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) = 1 \\ (-1)^2 + m(-m) = 1 \\ 1 - m^2 = 1 \Leftrightarrow m^2 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = 0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

FIȘĂ _ REZOLVAREA COMPLETĂ A DIFERITELOR TIPURI DE EXERCIIClasa a XII-a _**Algebră_Polinoame**

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică_bacalaureat (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat)

Exercițiul 2/sub. II/varianta 1/ M_mate-info/2025

2. Se consideră polinomul $f = aX^3 + 3X^2 - aX - 6$, unde a este număr real nenul.

a) Arătați că $f(1) = -3$, pentru orice număr real nenul a .

b) Pentru $a = 1$, determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $g = X^2 + 3X - 1$.

c) Determinați numărul real nenul a pentru care $(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3) = 1$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f .

Rezolvare:

$$a) \quad f(1) = a \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - a \cdot 1 - 6 \Leftrightarrow f(1) = a + 3 - a - 6 \Leftrightarrow f(1) = -3, (A), \forall a \in \mathbb{R}^*$$

$$b) \quad a = 1 \Rightarrow f = X^3 + 3X^2 - X - 6 \Leftrightarrow f = X(X^2 + 3X - 1) - 6 \\ \Leftrightarrow f = X \cdot g - 6$$

$$\text{Cum } f = g \cdot c + r \Rightarrow c = X, r = -6$$

c) Metoda 1.

$$(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3) = 1$$

$$(1+x_1+x_2+x_1x_2)(1+x_3) = 1$$

$$1+x_1+x_2+x_1x_2+x_3+x_1x_3+x_2x_3+x_1x_2x_3 = 1$$

$$(x_1+x_2+x_3) + (x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3) + x_1x_2x_3 = 0$$

$$f = aX^3 + 3X^2 - aX - 6, \text{ scriem relațiile lui Viète: } a_3 = a, a_2 = 3, a_1 = -a, a_0 = -6$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3} = -\frac{3}{a} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{a_1}{a_3} = \frac{-a}{a} = -1 \\ x_1x_2x_3 = -\frac{a_0}{a_3} = -\frac{-6}{a} = \frac{6}{a} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} (x_1+x_2+x_3) + (x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3) + x_1x_2x_3 = 0 \\ -\frac{3}{a} - 1 + \frac{6}{a} = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{a} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{3-a}{a} = 0 \\ \Rightarrow \frac{3-a}{a} = 0 \\ \Rightarrow a \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a = 3 \in \mathbb{R}^*$$

FIȘĂ _ REZOLVAREA COMPLETĂ A DIFERITELOR TIPURI DE EXERCITIIClasa a XII-a **Algebră Polinoame**

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică_bacalaureat (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat)

Exercițiul 2/sub. II/varianta 3/ M_mate-info/20242. Se consideră polinomul $f = X^3 + aX^2 + X + 2 - a$, unde a este număr real.a) Arătați că $f(1) = 4$, pentru orice număr real a .b) Pentru $a = 2$, determinați rădăcinile polinomului f .c) Determinați numărul real a pentru care $(x_1 - x_1^2)(x_2 - x_2^2)(x_3 - x_3^2) = 4$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f .

Rezolvare:

$$a) \quad f(1) = 1^3 + a \cdot 1^2 + 1 + 2 - a \Leftrightarrow f(1) = 1 + a + 1 + 2 - a \Leftrightarrow f(1) = 4, (A), \forall a \in \mathbb{R}$$

$$b) \quad a = 2 \Rightarrow f = X^3 + 2X^2 + X + 2 - 2$$

$$f = X^3 + 2X^2 + X \Leftrightarrow f = X(X^2 + 2X + 1) \Leftrightarrow f = X(X + 1)^2$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x(x + 1)^2 = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow x_1 = 0,$$

$$(x + 1)^2 = 0 \Rightarrow x_2 = x_3 = -1$$

$$c) \quad f = X^3 + aX^2 + X + 2 - a, \text{ scriem relațiile lui Viète: } a_3 = 1, a_2 = a, a_1 = 1, a_0 = 2 - a$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3} = -\frac{a}{1} = -a \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{a_1}{a_3} = \frac{1}{1} = 1 \\ x_1x_2x_3 = -\frac{a_0}{a_3} = -\frac{2-a}{1} = -2+a \end{cases} \quad \begin{cases} (x_1 - x_1^2)(x_2 - x_2^2)(x_3 - x_3^2) = 4 \\ x_1x_2x_3(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3) = 4 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \text{ sunt rădăcinile polinomului } f \Rightarrow f = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$$

$$\text{Deci } x_1x_2x_3 \cdot f(1) = 4 \Leftrightarrow (-2 + a) \cdot 4 = 4$$

$$\Leftrightarrow -2 + a = 1 \Rightarrow a = 3$$

Exercițiul 2/sub. II/varianta 3/ M_tehnologic/20242. Se consideră polinomul $f = X^3 + mX^2 + 2X - 5$, unde m este număr real.a) Arătați că $f(0) = -5$, pentru orice număr real m .b) Determinați numărul real m , știind că 1 este rădăcină a polinomului f .

FIȘĂ _ REZOLVAREA COMPLETĂ A DIFERITELOR TIPURI DE EXERCITIIClasa a XII-a **_Algebră_Polinoame**

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică_bacalaureat (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat)

c) Determinați numărul natural m pentru care $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 5$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f .

Rezolvare:

$$a) \quad f(0) = 0^3 + m \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 - 5 = -5, (A), \forall m \in \mathbb{R}$$

$$b) \quad m = ? \text{ pentru care } 1 \text{ este rădăcină a polinomului } f \Leftrightarrow f(1) = 0$$

$$f(1) = 0 \Leftrightarrow 1^3 + m \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 5 = 0 \Leftrightarrow m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2$$

$$d) \quad m = ?, m \in \mathbb{N}, \quad f = X^3 + mX^2 + 2X - 5, \text{ scriem relațiile lui Viète:}$$

$$a_3 = 1, a_2 = m, a_1 = 2, a_0 = -5$$

$$c) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3} = -\frac{m}{1} = -m & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 5 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{a_1}{a_3} = \frac{2}{1} = 2 & (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 5 \\ x_1x_2x_3 = -\frac{a_0}{a_3} = -\frac{-5}{1} = 5 & (-m)^2 - 2 \cdot 2 = 5 \Leftrightarrow m^2 = 9 \\ & \Rightarrow m_1 = 3 \in \mathbb{N}, m_2 = -3 \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

Rezultă că $m = 3$ este soluție.**Exercițiul 2/sub. II/varianta 7/ M_tehnologic/2019**

2. Se consideră polinomul $f = 2X^3 - 4X^2 + 4X - 3$, unde m este număr real.

$$a) \text{ Arătați că } f(0) = -3.$$

b) Demonstrați că numărul $a = \frac{3}{x_1} + \frac{3}{x_2} + \frac{3}{x_3}$ este natural, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f .

c) Demonstrați că polinomul f **nu** are toate rădăcinile reale.

Rezolvare:

$$a) \quad f(0) = 2 \cdot 0^3 - 4 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 - 3 \Leftrightarrow f(0) = -3, (A)$$

$$b) \quad a = \frac{3}{x_1} + \frac{3}{x_2} + \frac{3}{x_3} = ?, a \in \mathbb{N},$$

$$f = 2X^3 - 4X^2 + 4X - 3, \text{ scriem relațiile lui Viète: } a_3 = 2, a_2 = -4, a_1 = 4, a_0 = -3$$

FIȘĂ _ REZOLVAREA COMPLETĂ A DIFERITELOR TIPURI DE EXERCIȚIIClasa a XII-a **Algebră_Polinoame**

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică_bacalaureat (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3} = -\frac{-4}{2} = 2 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{a_1}{a_3} = \frac{4}{2} = 2 \\ x_1x_2x_3 = -\frac{a_0}{a_3} = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2} \end{cases} \quad \begin{aligned} a &= \frac{x_2x_3}{x_1} + \frac{x_1x_3}{x_2} + \frac{x_1x_2}{x_3} \Leftrightarrow a = \frac{3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)}{x_1x_2x_3} \\ a &= \frac{3 \cdot 2}{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow a = \frac{3 \cdot 2}{1} \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow a = 4 \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

c) polinomul f **nu** are toate rădăcinile reale ???

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2 + x_3)^2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \Rightarrow \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \\ \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 2^2 - 2 \cdot 2 = 0 \end{aligned}$$

Egalitatea este adevărată pentru $x_1 = x_2 = x_3 = 0, (F)$ pentru că $f(0) = -3$ conform a), deci x_1, x_2, x_3 nu pot fi toate reale.

Exercițiul 2/sub. II/varianta 8/ M_mate-info/2019

2. Se consideră x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului $f = X^3 + mX^2 - mX + 2$, unde m este număr real.

a) Determinați numărul real m , știind că $f(-2) = 0$.

b) Pentru $m = 1$, determinați rădăcinile polinomului f .

c) Se consideră $a = \frac{x_1^2 + mx_1}{x_2x_3} + \frac{x_2^2 + mx_2}{x_1x_3} + \frac{x_3^2 + mx_3}{x_1x_2}$. Demonstrați că $a \in [3, +\infty)$, pentru orice număr real m .