

FIȘĂ _ REZOLVAREA COMPLETĂ A DIFERITELOR TIPURI DE EXERCITIIClasa a XI-a _**Analiză matematică**

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat)

Exercițiul 1/sub. III/varianta 9/ M_mate-info/2025

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 + 6}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

a) Arătați că $f'(x) = \frac{x(x^2 - 4)}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}, x \in \mathbb{R}$.

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f .

c) Arătați că $f(7x) - f(x) \leq 2\sqrt{2}$, pentru orice $x \in [0, 1]$.

Rezolvare:

$$a) f'(x) = \left(\frac{x^2 + 6}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)'$$

$$\left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}, (x^n)' = nx^{n-1}, c' = 0, (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, (\sqrt{u(x)})' = \frac{1}{2\sqrt{u(x)}} \cdot u'(x)$$

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 6)' \sqrt{x^2 + 1} - (x^2 + 6)(\sqrt{x^2 + 1})'}{(\sqrt{x^2 + 1})^2} = \frac{2x\sqrt{x^2 + 1} - (x^2 + 6) \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot (x^2 + 1)'}{x^2 + 1}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} \cdot 2x\sqrt{x^2 + 1} - (x^2 + 6) \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x}{x^2 + 1} = \frac{2x(x^2 + 1) - (x^2 + 6)x}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 - 4x}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}, (A)$$

b) Ecuația tangentei într-un punct de abscisă x_0 situate pe graficul unei funcții f este

$$t: y - y_0 = m_t(x - x_0) \text{ unde } y_0 = f(x_0) \text{ și panta } m_t = f'(x_0)$$

$$\text{La noi } x_0 = 0 \text{ deci } y_0 = f(0) = \frac{6}{1} = 6 \text{ și } m_t = f'(0) = \frac{0}{1} = 0$$

$$\Rightarrow t: y - 6 = 0(x - 0) \Rightarrow t: y - 6 = 0 \Leftrightarrow t: y = 6$$

c) Folosim tabelul de monotonie al funcției f

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 4x}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} = 0 \Rightarrow x^2 - 4x = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 4$$

FIȘĂ _ REZOLVAREA COMPLETĂ A DIFERITELOR TIPURI DE EXERCII

Clasa a XI-a _**Analiză matematică**

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat)

x	$-\infty$	0	1	4	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	6	$\searrow \frac{7}{\sqrt{2}}$	$\searrow \frac{22}{\sqrt{17}}$	$\nearrow$
		Max		Min	

$$f(0) = 6, \quad f(1) = \frac{7}{\sqrt{2}}, \quad f(4) = \frac{22}{\sqrt{17}}$$

Din tabel rezultă că $\frac{7}{\sqrt{2}} \leq f(x) \leq 6, x \in [0, 1]$

$$x \in [0, 1] \Rightarrow 7x \in [0, 7], \quad f(7) = \frac{55}{\sqrt{50}} = \frac{5 \cdot 11}{5 \cdot \sqrt{2}} = \frac{11}{\sqrt{2}} \Rightarrow f(7x) \leq \frac{11}{\sqrt{2}}$$

$$\left. \begin{array}{l} -f(x) \leq -\frac{7}{\sqrt{2}} \\ f(7x) \leq \frac{11}{\sqrt{2}} \end{array} \right\} \Rightarrow f(7x) - f(x) \leq \frac{4}{\sqrt{2}} \Rightarrow f(7x) - f(x) \leq 2\sqrt{2}, (A)$$

Exercițiul 1/sub. III/varianța 1/ M_mate-info/2025

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + \ln \frac{x}{x+2}$.

a. Arătați că $f'(x) = \frac{2(x+1)^2}{x(x+2)}, x \in (0, +\infty)$.

b. Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f .

c. Demonstrați că funcția f este bijectivă.

Rezolvare:

$$a. \quad f'(x) = \left(2x + \ln \frac{x}{x+2} \right)'$$

$$(f+g)' = f' + g', (c \cdot f)' = c \cdot f', x' = 1, \left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, (\ln(u(x)))' = \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x)$$

FIȘĂ _ REZOLVAREA COMPLETĂ A DIFERITELOR TIPURI DE EXERCIIClasa a XI-a _ **Analiză matematică**

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat)

$$f'(x) = (2x)' + \left(\ln \frac{x}{x+2} \right)' = 2 + \frac{1}{\frac{x}{x+2}} \cdot \left(\frac{x}{x+2} \right)'$$

$$f'(x) = 2 + \frac{\cancel{x+2}}{x} \cdot \frac{x+2-\cancel{x}}{(x+2)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{x(x+2)}{x(x+2)} 2 + \frac{2}{x(x+2)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2x^2 + 4x + 2}{x(x+2)} \Rightarrow f'(x) = \frac{2(x^2 + 2x + 1)}{x(x+2)} = \frac{2(x+1)^2}{x(x+2)}, (A)$$

b. ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f este de forma $y = mx + n$

$$\text{unde } m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx)$$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \ln \frac{x}{x+2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{x} \underbrace{\ln \frac{x}{x+2}}_{\substack{\rightarrow 0 \\ \rightarrow 0}} \right) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{x}{x+2} \right) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+2} \right) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x}^1}{\cancel{x} \left(1 + \underbrace{\left(\frac{2}{x} \right)}_{\rightarrow 0} \right)} \right) = \ln 1 = 0$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x + \ln \frac{x}{x+2} - 2x \right)$$

$$\Rightarrow n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{x}{x+2} \right) = 0$$

Deci $y = 2x + 0 \Leftrightarrow y = 2x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f c. Funcția f este bijectivă dacă este injectivă și surjectivă.

$$f'(x) = \frac{2(x+1)^2}{x(x+2)}, x \in (0, +\infty) \Rightarrow f'(x) > 0, \forall x \in (0, +\infty) \text{ rezultă că funcția } f \text{ este strict}$$

crescătoare deci este și funcție injectivă (1)

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(2x + \ln \frac{x}{x+2} \right) = 0 + (-\infty) = -\infty$$

f este strict crescătoare și continuă

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x + \ln \frac{x}{x+2} \right) = +\infty + 0 = +\infty$$

Deci funcția f este surjectivă (2).Din (1) și (2) rezultă că f este bijectivă.

FIȘĂ _ REZOLVAREA COMPLETĂ A DIFERITELOR TIPURI DE EXERCIIClasa a XI-a _ **Analiză matematică**

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat)

Exercițiul 1/sub. III/varianta 1/ M_șt-nat/2025

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{x^2 + x + 2}$.

a) Arătați că $f'(x) = \frac{-3x^2 - x + 2}{(x^2 + x + 2)^2 \sqrt{x}}, x \in (0, +\infty)$

b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .

c) Determinați $a \in (0, +\infty)$ pentru care tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a, f(a))$ este paralelă cu axa Ox .

Rezolvare:

$$a. f'(x) = \left(\frac{2\sqrt{x}}{x^2 + x + 2} \right)'$$

$$(f+g)' = f' + g', (c \cdot f)' = c \cdot f', x' = 1, \left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \left(\frac{2\sqrt{x}}{x^2 + x + 2} \right)' = \frac{(2\sqrt{x})' \cdot (x^2 + x + 2) - 2\sqrt{x} \cdot (x^2 + x + 2)'}{(x^2 + x + 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}} \cdot (x^2 + x + 2) - \sqrt{x} \cdot 2\sqrt{x} \cdot (2x + 1)}{(x^2 + x + 2)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{(x^2 + x + 2) - 2x \cdot (2x + 1)}{(x^2 + x + 2)^2 \cdot \sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-3x^2 - x + 2}{(x^2 + x + 2)^2 \cdot \sqrt{x}}, (A)$$

b. există asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f , dacă există $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = p < \infty$ (și este finită), $\Rightarrow y = p$ este ecuația asimptotei orizontale la graficul funcției f spre $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x^2 + x + 2} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2\sqrt{x})'}{(x^2 + x + 2)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{2x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2x + 1)\sqrt{x}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

rezultă că $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$

FIȘĂ _ REZOLVAREA COMPLETĂ A DIFERITELOR TIPURI DE EXERCIIClasa a XI-a _**Analiză matematică**

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat)

c. Ecuația tangentei într-un punct de abscisă x_0 situate pe graficul unei funcții f este

$$t: y - y_0 = m_t(x - x_0) \text{ unde } y_0 = f(x_0) \text{ și panta } m_t = f'(x_0)$$

$$\left. \begin{array}{l} t \parallel Ox \Leftrightarrow m_t = m_{Ox} \\ Ox: y = 0 \Rightarrow m_{Ox} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow m_t = 0$$

Se cere $a \in (0, +\infty)$ pentru care tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a, f(a))$ este paralelă cu

$$x_0 = a,$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{axa } Ox, \text{ deci } m_t = f'(a) = \frac{-3a^2 - a + 2}{(a^2 + a + 2)^2 \cdot \sqrt{a}} \\ m_t = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -3a^2 - a + 2 = 0$$

$$a = -3, b = -1, c = 2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 2 \Rightarrow \Delta = 25$$

$$\begin{array}{ll} a_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} & a_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ a_1 = \frac{-(-1) + 5}{2 \cdot (-3)} & a_2 = \frac{-(-1) - 5}{2 \cdot (-3)} \\ a_1 = \frac{+6}{-6} & a_2 = \frac{-4}{-6} \\ a_1 = -1 \notin (0, +\infty) & a_2 = \frac{2}{3} \in (0, +\infty) \end{array} \Rightarrow S = \left\{ \frac{2}{3} \right\}$$

Exercițiul 1/sub. III/varianta 3/ M_mate-info/20251. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x - 2 + \ln x}{x}$.a) Arătați că $f'(x) = \frac{3 - \ln x}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$.b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = 3$.c) Determinați cel mai mare număr întreg m pentru care ecuația $f(x) = m$ are cel puțin o soluție.

Rezolvare:

$$a) f'(x) = \left(\frac{2x - 2 + \ln x}{x} \right)'$$

FIȘĂ _ REZOLVAREA COMPLETĂ A DIFERITELOR TIPURI DE EXERCII

Clasa a XI-a _ **Analiză matematică**

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat)

$$(f+g)' = f' + g', (c \cdot f)' = c \cdot f', x' = 1, \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \left(\frac{2x-2+\ln x}{x}\right)' \Leftrightarrow f'(x) = \frac{(2x-2+\ln x)' \cdot x - (2x-2+\ln x) \cdot x'}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{\left(2-0+\frac{1}{x}\right)' \cdot x - (2x-2+\ln x) \cdot 1}{x^2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2x+1-2x+2-\ln x}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{3-\ln x}{x^2}, (A)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = 3$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-2+\ln x}{x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-2+\ln x}{x \ln x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x-2+\ln x)'}{(x \ln x)'}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2+\frac{1}{x}}{\ln x + x \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2+\frac{1}{x}}{\ln x + 1} = \frac{3}{1} = 3, (A)$$

Am folosit formula de derivare a produsului de funcții: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.

$$c) f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3-\ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow 3-\ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 3 \Rightarrow x = e^3$$

Tabelul de monotonie este:

x	0	e^3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$2+\frac{1}{e^3}$ Max	2

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{2x-2+\ln x}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (2x-2+\ln x) \cdot \frac{1}{x} = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$$

FIȘĂ _ REZOLVAREA COMPLETĂ A DIFERITELOR TIPURI DE EXERCIIClasa a XI-a _**Analiză matematică**

Prof. Mestecan Cornelia

Matematică (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 2 + \ln x}{x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x - 2 + \ln x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{1} = 2$$

$$f(e^3) = \frac{2 \cdot e^3 - 2 + \ln e^3}{e^3} \Rightarrow f(e^3) = \frac{2 \cdot e^3 + 1}{e^3} = 2 + \frac{1}{e^3} \in (2, 3)$$

Din tabel rezultă că cel mai mare număr întreg m pentru care $f(x) = m$ are cel puțin o soluție este 2.