

Funcții continue_recapitulare

Interpretare grafică a continuității unei funcții- prin funcție cu grafic continuu înțelegem o funcție, definită pe un interval, al cărei grafic nu are întreruperi.

Definiție. Fie funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}, a \in D$. Spunem că funcția f este continuă în punctul a , dacă pentru orice vecinătate V a lui $f(a)$ există o vecinătate U a punctului a astfel încât pentru orice $x \in D \cap U$ să avem $f(x) \in V$.

Formulare echivalentă: Fie funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}, a \in D$. Spunem că funcția f este continuă în punctul a , dacă și numai dacă $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Definiție. Fie funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$. Spunem că funcția f este continuă pe o mulțime $A \subset D$, dacă este continuă în fiecare punct $a \in A$. Dacă o funcție este continuă pe tot domeniul de definiție D , se spune mai simplu că f este continuă.

Definiție. Fie funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}, a \in D$, un punct de acumulare pentru $D \cap (-\infty; a)$ (respectiv pentru $D \cap (a; +\infty)$). Spunem că funcția f este continuă la stânga (respectiv la dreapta) în punctul a , dacă $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = f(a)$ (respectiv $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = f(a)$).

Teoremă. Fie funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}, a \in D$, un punct de acumulare pentru D . Funcția f este continuă în punctul a dacă și numai dacă $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = f(a)$.

Operații cu funcții continue

Teoremă. Dacă funcțiile $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ sunt continue în punctul $a \in D$, atunci:

1. $f + g$ este continuă în a ;
2. αf este continuă în a , pentru $\alpha \in \mathbb{R}$;
3. $f \cdot g$ este continuă în a ;
4. dacă $g(a) \neq 0$, funcția $\frac{f}{g}$ este continuă în a ;
5. dacă $f(a) > 0$, funcția f^g este continuă în a .

Teoremă. Fie funcțiile $u : E \rightarrow D, f : D \rightarrow \mathbb{R}$ și $h = f \circ u$. Dacă funcția u este continuă în punctul $a \in E$ și funcția f este continuă în punctul corespunzător $b = u(a) \in D$, atunci funcția compusă $h = f \circ u$ este continuă în a .

Observație: funcțiile elementare sunt continue pe domeniul lor de definiție.

Teoremă. (proprietate) Fie I un interval de numere reale. Dacă $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă și $f(x) \neq 0, \forall x \in I$, atunci $f > 0$ sau $f < 0$ pe I .

Semnul funcției pe un interval

1. Proprietatea valorilor intermediare

Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, o funcție continuă pe intervalul $I \subset \mathbb{R}$. Funcția f are **proprietatea lui Darboux** pe intervalul I dacă $\forall a, b \in I, a < b$ și oricare ar fi α cuprins între $f(a)$ și $f(b)$, există $c \in (a; b)$ cu proprietatea că $f(c) = \alpha$.

2. Orice funcție continuă pe intervalul I are proprietatea lui Darboux pe intervalul I .

Consecințe

1. Fie $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă pe intervalul $[a; b]$. Dacă $f(a) \cdot f(b) < 0$, atunci există $c \in (a; b)$ cu $f(c) = 0$.
2. Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, o funcție continuă pe intervalul I . Dacă funcția f nu se anulează pe intervalul I , atunci f are același semn pe întreg intervalul I .