

Derivata unei funcții într-un punct. Funcții derivabile**Noțiuni teoretice recapitulare**

Definiție 1. Fie funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}, a \in D$ un punct de acumulare pentru D .

a) Spunem că funcția f admite derivată în punctul a , dacă există în $\bar{\mathbb{R}}$, limita $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$. Elementul $f'(a) \in \bar{\mathbb{R}}$ se numește **derivata** funcției f în punctul a .

b) Spunem că funcția f este **derivabilă** în punctul a , dacă există și este finită derivata $f'(a)$.

Definiție 2. Fie funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$. Spunem că funcția f este derivabilă pe o mulțime $A \subset D$, dacă este derivabilă în fiecare punct $a \in A$. Dacă o funcție este derivabilă pe tot domeniul de definiție D , se spune mai simplu că f este derivabilă.

Teoremă. Orice funcție derivabilă într-un punct este continuă în acel punct.

Definiție 3. Fie funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}, a \in D$, un punct de acumulare pentru $D \cap (-\infty; a)$ (respectiv pentru $D \cap (a; +\infty)$).

a) Spunem că funcția f admite derivată la stânga (respectiv la dreapta) în punctul a , dacă există în $\bar{\mathbb{R}}$, limita $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_s(a)$ (respectiv $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_d(a)$);

b) Spunem că funcția f este **derivabilă la stânga** (respectiv **la dreapta**) în punctul a , dacă există și este finită derivata $f'_s(a)$ (respectiv $f'_d(a)$).

Observație:

Dacă domeniul de definiție al funcției este $D = [\alpha; \beta]$, atunci problema derivatei are sens în orice punct al intervalului $(\alpha; \beta)$; în punctul α are sens problema derivatei la dreapta, iar în punctul β are sens problema derivatei la stânga.

Teoremă. Fie funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}, a \in D$, un punct de acumulare pentru D .

a) Funcția f are derivată în punctul a dacă și numai dacă $f'_s(a), f'_d(a)$ există în $\bar{\mathbb{R}}$ și $f'_s(a) = f'_d(a)$.

b) Funcția f este derivabilă în punctul a dacă și numai dacă $f'_s(a), f'_d(a)$ există, sunt finite și $f'_s(a) = f'_d(a)$.

Observații (interpretare geometrică a derivatei într-un punct):

Fie funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}, a \in D$, un punct de acumulare pentru D .

1. dacă f este derivabilă în punctul a , graficul funcției admite tangentă în punctul $M(x_M; y_M)$ de ecuație: $t: y - y_M = m_t(x - x_M)$; unde $x_M = a$; $y_M = f(a)$ și $m_t = f'(a)$.

2. dacă funcția f este continuă în punctul a și $f'_s(a) = +\infty$, $f'_d(a) = -\infty$ (sau invers), atunci punctul a se numește **punct de întoarcere**.

3. dacă funcția f este continuă în punctul a și $f'_s(a), f'_d(a)$ există, cel puțin una fiind finită, dar f nu este derivabilă în a , atunci punctul a se numește **punct unghiular**.

Derivata de ordinul II

Definiție: Fie funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$, o funcție derivabilă și $a \in D$ punct de acumulare pentru D .

Dacă f' este derivabilă în punctul a , vom spune că f este de două ori derivabilă în a și vom scrie

$f''(a) = (f')'(a)$. Dacă f' este derivabilă pe D , vom scrie $f'' = (f')'$ sau $f^{(2)} = (f')'$ și vom spune că f este de două ori derivabilă pe D .

Observație:

Dacă f este de două ori derivabilă în a , derivata lui f' în a se numește derivata de ordinul doi a funcției f în a și se notează cu $f''(a)$

$$f''(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a}$$

Studiul funcțiilor cu ajutorul derivatelor**Rolul derivatei întâi în studiul funcției: monotonie, puncte de extrem**

Def. Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}, I \subset \mathbb{R}, I$ interval, $a \in I$. Punctul a se numește punct de minim relativ (local) al funcției f dacă există o vecinătate V a punctului a astfel încât $f(x) \geq f(a), \forall x \in I \cap V$.

Punctul a se numește punct de maxim relativ (local) al funcției f dacă există o vecinătate V a punctului a astfel încât $f(x) \leq f(a), \forall x \in I \cap V$.

Punctul a , care este punct de minim relativ sau punct de maxim relativ, se numește punct de extrem relativ (local).

T.1. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă. Dacă funcția f este monoton crescătoare (respectiv monoton descrescătoare), atunci $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$ (respectiv $f'(x) \leq 0, \forall x \in I$).

T.2. 1. Dacă $f'(x) > 0, \forall x \in I$ (respectiv $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$), atunci funcția f este strict crescătoare (respectiv monoton crescătoare).

2. Dacă $f'(x) < 0, \forall x \in I$ (respectiv $f'(x) \leq 0, \forall x \in I$), atunci funcția f este strict descrescătoare (respectiv monoton descrescătoare).

Rolul derivatei a doua în studiul funcției: convexitate / concavitate, puncte de inflexiune**Definiție 1:**

Funcția derivabilă $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ se numește **convexă** pe I dacă tangenta în orice punct al graficului se află sub grafic și se numește **concavă** pe I dacă tangenta în orice punct al graficului se află deasupra acestuia.

Teoremă

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă. Atunci:

- 1) f este convexă pe I dacă și numai dacă $f''(x) \geq 0, \forall x \in I$;
- 2) f este concavă pe I dacă și numai dacă $f''(x) \leq 0, \forall x \in I$.

Pașii ce se urmează:

- a) se calculează derivata a doua f''
- b) se rezolvă ecuația $f''(x) = 0$
- c) se determină intervalele pe care derivata a doua păstrează același semn
- d) după cum semnul derivatei a doua este "+" sau "-", se stabilește că funcția este convexă sau concavă pe aceste intervale.

Obs. -dacă derivata a doua f'' are semne diferite de o parte și de alta a unui punct x_0 din I și dacă f este continuă în x_0 , atunci x_0 se numește **punct de inflexiune**.

-derivata a doua este utilă și la determinarea naturii unui punct critic a (adică rădăcină a derivatei întâi) al unei funcții $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de două ori derivabile:

- dacă $f''(a) > 0$, atunci a este punct de minim local
- dacă $f''(a) < 0$, atunci a este punct de maxim local