

Mulțimea numerelor reale

Dreapta reală $\mathbb{R}$: -se numește *axa numerelor reale* (axă de coordonate) o dreaptă d pe care sunt fixate : un punct O (originea), un segment OE (de lungime unitate) și un sens pozitiv (de la O la E).

$\xrightarrow{\quad P(-b) \quad O \quad E \quad M(a) \quad}$ $|OE| = dist(O; E) = 1$, $a \in \mathbb{R}$ este abscisa punctului M ; $O(0)$ adică abscisa lui O este 0 ; pe dreapta reală se reprezintă toate numerele reale, adică mulțimea $\mathbb{R}$ (mulțimea numerelor reale)

Dreapta reală încheiată: $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$

Pentru orice număr real x considerăm:

- $-\infty < x < +\infty$
- $x + \infty = \infty + x = \infty$
- $x - \infty = -\infty + x = -\infty$
- $x \cdot \infty = \infty \cdot x = \begin{cases} \infty, x > 0 \\ -\infty, x < 0 \end{cases}$
- $\frac{x}{\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$
- $\infty + \infty = \infty; -\infty - \infty = -\infty; \infty \cdot \infty = \infty; -\infty \cdot \infty = -\infty; (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$

Nu definim și nu dăm sens scrierilor (le mai spunem și **operații fără sens**):

$$\infty - \infty; -\infty + \infty; 0 \cdot (\pm\infty); (\pm\infty) \cdot 0; \frac{\pm\infty}{\pm\infty}; \frac{0}{\pm\infty}$$

Mulțimea numerelor reale este înzestrată cu trei tipuri de structuri fundamentale:

-structura algebrică (dată de cele două operații fundamentale: "+" ; "." împreună cu proprietățile lor)

-structura de ordine (definită de relația $\leq$ sau de relațiile înrudite : $<$; $>$; $\geq$)

-structura topologică (modul cum se *leagă* între ele numerele , adică orice număr real are o vecinătate și în orice vecinătate, oricât de mică, a unui număr real se află o infinitate de numere; prin urmare ca să studiem unele numere vom apela la vecinii lor)

Definiție

-O mulțime de numere reale V este *vecinătatea numărului* a dacă există $r > 0$ astfel încât $(a - r; a + r) \subset V$

Propoziție: intervalele deschise $(a; b)$ sunt vecinătăți pentru orice punct al lor.

Definiții

-Fie A o submulțime a lui $\bar{\mathbb{R}}$. Un element $x \in \bar{\mathbb{R}}$ este *punct de acumulare* pentru mulțimea A dacă orice vecinătate V a lui x mai conține și alte puncte diferite de x din A . Se notează cu A' mulțimea punctelor de acumulare ale lui A . Un element $x \in A$ care nu este punct de acumulare pentru A se numește *punct izolat* al lui A .

Intervalele nemărginite de numere reale	Intervalele mărginite de numere reale
$(a; +\infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > a\}$	$(a; b) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x < b\}, a, b \in \mathbb{R}, a < b$
$[a; +\infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$	$[a; b) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}, a, b \in \mathbb{R}, a < b$
$(-\infty; a) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x < a\}$	$(a; b] = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}, a, b \in \mathbb{R}, a < b$
$(-\infty; a] = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq a\}$	$[a; b] = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}, a, b \in \mathbb{R}, a < b$

Limita unei funcții într-un punct

Definiții

Limita unei funcții într-un punct

-Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}, a \in D', l \in \overline{\mathbb{R}}$. Funcția f are limita l în punctul a , dacă pentru orice vecinătate V a punctului l , există o vecinătate U a lui a astfel încât $\forall x \in U \cap D \setminus \{a\}, f(x) \in V$. În acest caz notăm $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ și citim “ limită când x tinde la a din $f(x)$ este egală cu l ”

Limite laterale

-Fie funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}, a \in D', l \in \overline{\mathbb{R}}$

- dacă a este punct de acumulare la dreapta, spunem că funcția f are limită la dreapta în a dacă $\forall V$ o vecinătate a lui l , $\exists U$ o vecinătate a lui a , astfel încât $\forall x \in U \cap D \cap (a; +\infty), f(x) \in V$ și notăm $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ (se mai notează cu $f(a+0)$)

- dacă a este punct de acumulare la stânga, spunem că funcția f are limită la stânga în a dacă $\forall V$ o vecinătate a lui l , $\exists U$ o vecinătate a lui a , astfel încât $\forall x \in U \cap D \cap (-\infty; a), f(x) \in V$ și notăm $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ (se mai notează cu $f(a-0)$)

Teoramă: Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}, a \in D'$. Funcția f are limită în a dacă și numai dacă f are limită la dreapta și la stânga în a și aceste limite sunt egale, sau simbolic:

există $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \Leftrightarrow$ există $\lim_{x \rightarrow a, x < a} f(x), \lim_{x \rightarrow a, x > a} f(x)$ și sunt egale

în acest caz $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a, x < a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a, x > a} f(x)$

Calculul limitelor funcțiilor elementare

Nr. crt.	Funcția	Calculul limitei
1	Funcția constantă: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = c, c \in \mathbb{R}$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c, \forall a \in \overline{\mathbb{R}}$
2	Funcția identică: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$	$\lim_{x \rightarrow a} x = a, \forall a \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$
3	Funcția putere $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ (exponent natural)	$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = f(\alpha), \forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = \infty;$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} \infty, n \in \{2k \mid k \in \mathbb{N}\} \\ -\infty, n \in \{2k+1 \mid k \in \mathbb{N}\} \end{cases}$

	$f : (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty), f(x) = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}^*$ (exponent real)	$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = f(\alpha), \forall \alpha \in (0; +\infty)$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = \begin{cases} \infty, \alpha > 0 \\ 0, \alpha < 0 \end{cases};$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^\alpha = \begin{cases} 0, \alpha > 0 \\ \infty, \alpha < 0 \end{cases}$
4	Funcția radical 1. $f : [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty), f(x) = \sqrt[k]{x}, k \in \mathbb{N}, n \geq 2, k$ par	$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = f(\alpha), \forall \alpha \in [0; +\infty)$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$
	2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[k]{x}, k \in \mathbb{N}, n \geq 2, k$ impar	$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = f(\alpha), \forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
3	Funcția exponențială $f : \mathbb{R} \rightarrow (0; +\infty), f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$	$\lim_{x \rightarrow \alpha} a^x = a^\alpha, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \begin{cases} \infty, a > 1 \\ 0, 0 < a < 1 \end{cases}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} 0, a > 1 \\ \infty, 0 < a < 1 \end{cases}$
4	Funcția logaritmică $f : (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_a x, a \in (0; +\infty) \setminus \{1\}$	$\lim_{x \rightarrow \alpha} \log_a x = \log_a \alpha, \forall \alpha \in (0; +\infty)$ Dacă $a > 1$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \infty; \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \log_a x = -\infty$ Dacă $0 < a < 1$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = -\infty; \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \log_a x = \infty$
5	Funcții trigonometrice Funcția sinus: $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1; 1], f(x) = \sin x$	$\lim_{x \rightarrow \alpha} \sin x = \sin \alpha, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ nu există $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ și $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin x$
	Funcția cosinus: $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1; 1], f(x) = \cos x$	$\lim_{x \rightarrow \alpha} \cos x = \cos \alpha, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ nu există $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x$ și $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos x$

Funcția tangentă: $f: \mathbb{R} \setminus \left\{ k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{tg} x,$ $\left(\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \right)$	1. $\lim_{x \rightarrow \alpha} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha,$ $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{ k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ 2. $\lim_{\substack{x \rightarrow k\pi + \frac{\pi}{2} \\ x < k\pi + \frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg} x = \infty; \lim_{\substack{x \rightarrow k\pi + \frac{\pi}{2} \\ x > k\pi + \frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg} x = -\infty$ 3. nu există $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{tg} x$ și $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{tg} x$
Funcția cotangentă: $f: \mathbb{R} \setminus \{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{ctg} x, \left(\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} \right)$	1. $\lim_{x \rightarrow \alpha} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} \alpha,$ $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$ 2. $\lim_{\substack{x \rightarrow k\pi \\ x < k\pi}} \operatorname{ctg} x = -\infty; \lim_{\substack{x \rightarrow k\pi \\ x > k\pi}} \operatorname{ctg} x = \infty$ 3. nu există $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{ctg} x$ și $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{ctg} x$
Funcția arcsinus: $f: [-1; 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right], f(x) = \arcsin x$	$\lim_{x \rightarrow \alpha} \arcsin x = \arcsin \alpha,$ $\forall \alpha \in [-1; 1]$
Funcția arccosinus: $f: [-1; 1] \rightarrow [0; \pi], f(x) = \arccos x$	$\lim_{x \rightarrow \alpha} \arccos x = \arccos \alpha,$ $\forall \alpha \in [-1; 1]$
Funcția arctangentă: $f: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right), f(x) = \operatorname{arctg} x$	$\lim_{x \rightarrow \alpha} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} \alpha, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}; \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$
Funcția arccotangentă $f: \mathbb{R} \rightarrow (0; \pi), f(x) = \operatorname{arcctg} x$	$\lim_{x \rightarrow \alpha} \operatorname{arcctg} x = \operatorname{arcctg} \alpha, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arcctg} x = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi$