

FIȘĂ _ REZOLVAREA COMPLETĂ A DIFERITELOR TIPURI DE EXERCII

Clasa a IX-a

Matematică M1 sau actual M_mate-info și M_științe ale naturii

Prof. Mestecan Cornelia

Progresii**Teorie_recapitulare**

Progresii aritmetice	Progresii geometrice
Șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ se numește progresie aritmetică de rație r, dacă $a_{n+1} = a_n + r, \forall n \geq 1.$ Formula termenului general $a_n = a_1 + (n-1)r, \forall n \geq 1$ Suma primilor n termeni $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$ Proprietate $(a_n)_{n \geq 1}$ progresie aritmetică $\Leftrightarrow$ $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \forall n \geq 2.$	Șirul $(b_n)_{n \geq 1}$ se numește progresie geometrică de rație $q \neq 0$, dacă $b_{n+1} = b_n \cdot q, \forall n \geq 1.$ Formula termenului general $b_n = b_1 q^{n-1}, \forall n \geq 1.$ Suma primilor n termeni $S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = \begin{cases} b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, & q \neq 1 \\ nb_1, & q = 1 \end{cases}$ Proprietate $(b_n)_{n \geq 1}$ (cu termeni pozitivi) este progresie geometrică $\Leftrightarrow$ $b_n = \sqrt{b_{n-1} b_{n+1}}, \forall n \geq 2$

Exercițiul 1/Sub. I/varianta nr. 11/ antrenament bac 2009/M1

1. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ știind că numerele $2, a, b$ sunt în progresie geometrică și $2, 17, a$ sunt în progresie aritmetică.

Extragem informațiile date:

- a. **Știm** că numerele $2, a, b$ sunt în progresie geometrică
- b. **Știm** că $2, 17, a$ sunt în progresie aritmetică

Se cer $a, b \in \mathbb{R} !$ **Rezolvare:**

$(b_n)_{n \geq 1}$ (cu termeni pozitivi) este progresie geometrică $\Leftrightarrow b_n = \sqrt{b_{n-1} b_{n+1}}, \forall n \geq 2$ (toți termenii începând cu la doilea, sunt medie geometrică a termenilor vecini)

FIȘĂ _ REZOLVAREA COMPLETĂ A DIFERITELOR TIPURI DE EXERCII

Clasa a IX-a

Matematică M1 sau actual M_mate-info și M_științe ale naturii

Prof. Mestecan Cornelia

$2, a, b$ sunt în progresie geometrică $\Leftrightarrow a = \sqrt{2 \cdot b} \Rightarrow a^2 = 2b$

$(a_n)_{n \geq 1}$ progresie aritmetică $\Leftrightarrow a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \forall n \geq 2$

(toți termenii începând cu la doilea, sunt medie aritmetică a termenilor vecini)

$2, 17, a$ sunt în progresie aritmetică $\Leftrightarrow 17 = \frac{2+a}{2} \Rightarrow 2+a = 34 \Rightarrow a = 32$

Prin urmare avem

$$\begin{cases} a^2 = 2b \\ a = 32 \end{cases} \Rightarrow b = 16 \Rightarrow b_1 = 4, b_2 = -4 \text{ dar } a = 32 > 0 \Rightarrow b > 0 \Rightarrow b = 4$$

Exercițiul 1/Sub. I/varianta nr. 9/ antrenament bac 2009/M1

1. Să se determine numărul natural x pentru care $1+3+5+\dots+x = 225$

Extragem informațiile date:

- a. **Observăm** că este vorba despre o progresie aritmetică $\Rightarrow$ termenii șirului se află prin adunare repetată cu un același număr fix numit **rație**, notată cu $r = 2$ și primul termen este $a_1 = 1$

$$(a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5 \Rightarrow 3 = 1 + 2, 5 = 3 + 2)$$

- b. **Observăm** că sunt n termeni și $a_n = x$

- c. **Știm** că suma celor n termeni este 225

Se cere $x \in \mathbb{N}$!

Rezolvare:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \Leftrightarrow x = 1 + (n-1) \cdot 2,$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \Leftrightarrow 225 = \frac{(1+x) \cdot n}{2} \Rightarrow (1+x) \cdot n = 450$$

$$\begin{cases} x = 1 + (n-1) \cdot 2 \\ (1+x) \cdot n = 450 \end{cases} \Rightarrow (1+1+(n-1) \cdot 2) \cdot n = 450 \Leftrightarrow (2+2n-2)n = 450$$

Obținem $2n^2 = 450 \Rightarrow n^2 = 225 \Rightarrow n_1 = 15, n_2 = -15$ dar $n \in \mathbb{N}$ deci $n_1 = 15$ de unde rezultă că $x = 1 + (15-1) \cdot 2 \Rightarrow x = 29 \in \mathbb{N}$ soluție

FIȘĂ _ REZOLVAREA COMPLETĂ A DIFERITELOR TIPURI DE EXERCIȚII

Clasa a IX-a Matematică M1 sau actual M_mate-info și M_științe ale naturii

Prof. Mestecan Cornelia

Exercițiul 1/Sub. I/varianta nr. 23/ antrenament bac 2009/M1

1. Să se calculeze suma primilor 20 de termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, știind că $a_4 - a_2 = 4$ și $a_1 + a_3 + a_5 + a_6 = 30$

Extragem informațiile date:

- a. **Știm** că este vorba despre o progresie aritmetică $\Rightarrow$ termenii șirului se află prin adunare repetată cu un același număr fix numit **rație**, notată cu **r**
- b. **Știm** că $a_4 - a_2 = 4$ și $a_1 + a_3 + a_5 + a_6 = 30$

Se cere suma primilor 20 de termeni ai progresiei !**Rezolvare:**

$$a_n = a_1 + (n-1)r, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

Scriem termenii regăsiți în relațiile date

$$a_2 = a_1 + r; a_3 = a_1 + 2r; a_4 = 3r; a_5 = 4r; a_6 = 5r$$

Înlocuim în relațiile date și obținem:

$$\begin{cases} (a_1 + 3r) - (a_1 + r) = 4 \\ a_1 + (a_1 + 2r) + (a_1 + 4r) + (a_1 + 5r) = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2r = 4 \\ 4a_1 + 11r = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ 4a_1 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 2 \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \Rightarrow S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = 10(a_1 + a_{20})$$

$$a_{20} = 2 + (20-1) \cdot 2 = 40$$

$$\text{Deci } S_{20} = 10(a_1 + a_{20}) \Leftrightarrow S_{20} = 10(2 + 40) \Leftrightarrow S_{20} = 420$$

Exercițiul 1/Sub. I/varianta nr. 32/ antrenament bac 2009/M1

1. Se consider numărul real $s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2009}}$. Să se demonstreze că $s \in (1; 2)$

Extragem informațiile date:

- a. **Observăm** că este vorba despre o progresie geometrică $\Rightarrow$ termenii șirului se află prin înmulțire repetată cu un același număr fix numit **rație**, notată cu

$$q = \frac{1}{2} \text{ și primul termen este } b_1 = 1$$

FIȘĂ _ REZOLVAREA COMPLETĂ A DIFERITELOR TIPURI DE EXERCII

Clasa a IX-a

Matematică M1 sau actual M_mate-info și M_științe ale naturii

Prof. Mestecan Cornelia

$$\text{i. } \left(b_1 = 1, b_2 = \frac{1}{2}, b_3 = \frac{1}{2^2} \Rightarrow q = \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{b. } \textbf{Observăm} \text{ că sunt 2010 termeni și } b_{2010} = \frac{1}{2^{2009}}$$

Se cere să se arate că $s \in (1; 2)$!**Rezolvare:**Stim că suma primilor n termeni ai unei progresii geometrice este

$$S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = \begin{cases} b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, q \neq 1 \\ nb_1, q = 1 \end{cases} \quad \text{în cazul nostru}$$

$$S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \Leftrightarrow S_{2010} = 1 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2^{2010}} \right) - 1}{\frac{1}{2} - 1} \Leftrightarrow S_{2010} = \frac{1 - 2^{2010}}{\frac{1 - 2}{2}} \Rightarrow S_{2010} = \frac{2^{2010} - 1}{2^{2010}} \cdot \frac{2}{1}$$

$$S_{2010} = \frac{2^{2010} - 1}{2^{2009}} = 2 - \frac{1}{2^{2009}} \Rightarrow s = 2 - \frac{1}{2^{2009}}$$

$$0 < \frac{1}{2^{2009}} < 1 \mid \cdot (-1) \Rightarrow -1 < -\frac{1}{2^{2009}} < 0 \mid + 2 \Rightarrow 1 < 2 - \frac{1}{2^{2009}} < 2 \Leftrightarrow s \in (1, 2)$$