

FIȘĂ _ REZOLVAREA COMPLETĂ A DIFERITELOR TIPURI DE EXERCII

Clasa a IX-a

Matematică_M2 sau actual M_tehnologic

Prof. Mestecan Cornelia

Progresii**Teorie_recapitulare**

Progresii aritmetice	Progresii geometrice
Șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ se numește progresie aritmetică de rație r, dacă $a_{n+1} = a_n + r, \forall n \geq 1.$ Formula termenului general $a_n = a_1 + (n-1)r, \forall n \geq 1$ Suma primilor n termeni $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$ Proprietate $(a_n)_{n \geq 1}$ progresie aritmetică $\Leftrightarrow$ $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \forall n \geq 2.$	Șirul $(b_n)_{n \geq 1}$ se numește progresie geometrică de rație $q \neq 0$, dacă $b_{n+1} = b_n \cdot q, \forall n \geq 1.$ Formula termenului general $b_n = b_1 q^{n-1}, \forall n \geq 1.$ Suma primilor n termeni $S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = \begin{cases} b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, q \neq 1 \\ nb_1, q = 1 \end{cases}$ Proprietate $(b_n)_{n \geq 1}$ (cu termeni pozitivi) este progresie geometrică $\Leftrightarrow$ $b_n = \sqrt{b_{n-1} b_{n+1}}, \forall n \geq 2$

Exercițiul 1/Sub I/Simulare bac 2018/M_tehnologic

1. Calculați rația progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, știind că $b_1 = 3$ și $b_4 = 24$.

Extragem informațiile date:

- Știm** că este vorba despre o progresie geometrică $\Rightarrow$ termenii șirului se află prin înmulțire repetată cu un același număr fix numit **rație**, notată cu **q**
- Știm** că $b_1 = 3$ și $b_4 = 24$

Se cere rația progresiei

Rezolvare:

FIȘĂ _ REZOLVAREA COMPLETĂ A DIFERITELOR TIPURI DE EXERCII

Clasa a IX-a

Matematică_M2 sau actual M_tehnologic

Prof. Mestecan Cornelia

Metoda I	Metoda II
Ne folosim de definiția progresiei! $b_1 = 3$ $b_2 = b_1 \cdot q \Leftrightarrow b_2 = 3 \cdot q$ $b_3 = b_2 \cdot q \Leftrightarrow b_3 = (3 \cdot q) \cdot q = 3 \cdot q^2$ $b_4 = b_3 \cdot q \Leftrightarrow b_4 = (3 \cdot q^2) \cdot q = 3 \cdot q^3$ știm că $b_4 = 24$, înlocuim $24 = 3 \cdot q^3 \Rightarrow q^3 = 8 \Rightarrow q = 2$ Deci $S = \{2\}$	Folosim relații/formule cunoscute! $b_1 = 3$ $b_4 = 24$ Știm formula $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ Înlocuim cu datele cunoscute $24 = 3 \cdot q^{4-1} \Leftrightarrow 24 = 3 \cdot q^3 \Rightarrow q^3 = 8 \Rightarrow q = 2$ Deci $S = \{2\}$

Exercițiul 1/Sub I/ Simulare bac 2022/M_tehnologic

1. Calculați termenul a_1 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, știind că $a_3 = 6$ și $a_4 = 9$

Extragem informațiile date:

- Știm că este vorba despre o progresie aritmetică $\Rightarrow$ termenii șirului se află prin adunare repetată cu un același număr fix numit **rație**, notată cu r
- Știm că $a_3 = 6$ și $a_4 = 9$

Se cere a_1 primul termen al progresiei

Rezolvare:

Metoda I	Metoda II
Ne folosim de definiția progresiei! $a_4 = a_3 + r \Leftrightarrow 9 = 6 + r \Rightarrow r = 3$ $a_3 = a_2 + r \Leftrightarrow 6 = a_2 + 3 \Rightarrow a_2 = 3$ $a_2 = a_1 + r \Leftrightarrow 3 = a_1 + 3 \Rightarrow a_1 = 0$ Deci $S = \{0\}$	Folosim relații/formule cunoscute! $a_3 = 6$ $a_4 = 9$ Știm formula $a_n = a_1 + (n-1)r$ Înlocuim cu datele cunoscute $\begin{cases} a_3 = a_1 + 2r \\ a_4 = a_1 + 3r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = a_1 + 2r \\ 9 = a_1 + 3r \end{cases} \Rightarrow r = 3$ Înlocuim în oricare relație și obținem: $6 = a_1 + 2 \cdot 3 \Leftrightarrow 6 = a_1 + 6 \Rightarrow a_1 = 0$ sau $9 = a_1 + 3 \cdot 3 \Leftrightarrow 9 = a_1 + 9 \Rightarrow a_1 = 0$ Deci $S = \{0\}$

FIȘĂ _ REZOLVAREA COMPLETĂ A DIFERITELOR TIPURI DE EXERCII

Clasa a IX-a

Matematică_M2 sau actual M_tehnologic

Prof. Mestecan Cornelia

Metoda III	
Ne folosim de definiția progresiei și de formule cunoscute: $a_4 = a_3 + r \Leftrightarrow 9 = 6 + r \Rightarrow r = 3$ $a_n = a_1 + (n-1)r$ $a_4 = a_1 + (4-1)r \Leftrightarrow 9 = a_1 + 3 \cdot 3$ $\Leftrightarrow 9 = a_1 + 9$ rezultă că $a_1 = 0$ Deci $S = \{0\}$	

Exercițiul 1/Sub. I/varianta 5/ bac 2011/M_tehnologic

1. Determinați $x \in \mathbb{R}$ pentru care numerele $x-1, x+1$ și $3x-1$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

Extragem informațiile date:

- a. **Știm** că este vorba despre o progresie aritmetică $\Rightarrow$ termenii șirului se află prin adunare repetată cu un același număr fix numit **rație**, notată cu r
- b. **Știm** că $a_1 = x-1, a_2 = x+1, a_3 = 3x-1$

Se cere $x \in \mathbb{R}$ **Rezolvare:**

Metoda I	Metoda II
Ne folosim de definiția progresiei! $a_2 = a_1 + r \Leftrightarrow x+1 = x-1 + r \Rightarrow r = 2$ $a_3 = a_2 + r \Leftrightarrow 3x-1 = x+1 + 2 \Rightarrow 2x = 4$ $\Rightarrow x = 2$ Deci $S = \{2\}$	Folosim relații/formule cunoscute! Știm că sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice, deci termenul din mijloc este medie aritmetică a termenilor vecini lui $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \forall n \geq 2.$ Adică $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} \Leftrightarrow x+1 = \frac{x-1 + 3x-1}{2} \Leftrightarrow 2x+2 = 4x-2$ $\Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$ Deci $S = \{2\}$

FIȘĂ _ REZOLVAREA COMPLETĂ A DIFERITELOR TIPURI DE EXERCITII

Clasa a IX-a

Matematică_M2 sau actual M_tehnologic

Prof. Mestecan Cornelia

Exercițiul 1/Sub. I/test nr. 9/ antrenament bac 2020/M_tehnologic

1. Calculați suma primilor patru termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, în care

$$a_1 = 2 \text{ și } a_4 = 11$$

Extragem informațiile date:

- a. **Știm** că este vorba despre o progresie aritmetică $\Rightarrow$ termenii șirului se află prin adunare repetată cu un același număr fix numit **rație**, notată cu **r**
- b. **Știm** că $a_1 = 2$ și $a_4 = 11$

Se cere suma primilor patru termeni ai progresiei

Rezolvare:

Metoda I	Metoda II
Ne folosim de definiția progresiei! $a_2 = a_1 + r \Leftrightarrow a_2 = 2 + r$ $a_3 = a_2 + r \Leftrightarrow a_3 = 2 + r + r \Leftrightarrow a_3 = 2 + 2r$ $a_4 = a_3 + r \Leftrightarrow 11 = 2 + 2r + r$ $\Leftrightarrow 11 = 2 + 3r \Rightarrow 3r = 9$ $\Rightarrow r = 3$ Prin urmare cei patru termeni sunt: $a_1 = 2; a_2 = 2 + r = 2 + 3 = 5$ $a_3 = 2 + 2r = 2 + 6 = 8, a_4 = 11$ Deci suma este $S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2 + 5 + 8 + 11$ $S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 26$	Folosim formule cunoscute și definiția! $a_1 = 2$ $a_4 = 11$ Știm formula $a_n = a_1 + (n-1)r$ Înlocuim cu datele cunoscute $a_4 = a_1 + (4-1)r \Leftrightarrow 11 = 2 + 3r$ $\Rightarrow 3r = 9 \Rightarrow r = 3$ Calculăm ceilalți termeni $a_2 = a_1 + r \Leftrightarrow a_2 = 2 + 3 = 5$ $a_3 = a_1 + 2r \Leftrightarrow a_3 = 2 + 6 = 8$ Deci suma este $S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2 + 5 + 8 + 11$ $S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 26$
Metoda III	
Folosim doar formule! Suma primilor n termeni $a_1 = 2, a_4 = 11$ $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$ $S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \frac{(a_1 + a_4)4}{2}$ $S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = (2 + 11) \cdot 2 = 26$	

FIȘĂ _ REZOLVAREA COMPLETĂ A DIFERITELOR TIPURI DE EXERCII

Clasa a IX-a

Matematică_M2 sau actual M_tehnologic

Prof. Mestecan Cornelia

Exercițiul 1/Sub. I/varianta nr. 59/ antrenament bac 2009/M2

1. Să se determine valorile reale ale numărului x știind că numerele $5 - x; x + 7; 3x + 11$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice.

Extragem informațiile date:

- a. **Știm** că este vorba despre o progresie geometrică $\Rightarrow$ termenii șirului se află prin înmulțire repetată cu un același număr fix numit **rație**, notată cu q
- b. **Știm** că $b_1 = 5 - x, b_2 = x + 7, b_3 = 3x + 11$

Se cere $x \in \mathbb{R}$ **Rezolvare:**

Metoda I	Metoda II
Ne folosim de definiția progresiei! $b_2 = b_1 \cdot q \Leftrightarrow x + 7 = (5 - x) \cdot q \Rightarrow q = \frac{x + 7}{5 - x}$ $b_3 = b_2 \cdot q \Leftrightarrow 3x + 11 = (x + 7) \cdot q \Rightarrow q = \frac{3x + 11}{x + 7}$ Putem egala cele două expresii obținute pentru q $\frac{x + 7}{5 - x} = \frac{3x + 11}{x + 7} \Rightarrow (x + 7)^2 = (5 - x)(3x + 11)$ $\Leftrightarrow x^2 + 14x + 49 = -3x^2 + 4x + 55$ $\Rightarrow 4x^2 + 10x - 6 = 0$ $a = 4; b = 10; c = -6$ $\Delta = b^2 - 4ac \Leftrightarrow \Delta = 10^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-6) = 196$ $\sqrt{\Delta} = \sqrt{196} = 14$ $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_1 = \frac{-10 + 14}{2 \cdot 4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_1 = \frac{-10 - 14}{2 \cdot 4} = \frac{-24}{8} = -3 \in \mathbb{R}$	Folosim relații/formule cunoscute! Știm că sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice, deci termenul din mijloc este medie geometrică a termenilor vecini lui $b_n = \sqrt{b_{n-1} b_{n+1}}, \forall n \geq 2$ Adică $b_2 = \sqrt{b_1 \cdot b_3} \Leftrightarrow x + 7 = \sqrt{(5 - x) \cdot (3x + 11)}$ $\Leftrightarrow (x + 7)^2 = (5 - x) \cdot (3x + 11)$ $\Leftrightarrow x^2 + 14x + 49 = -3x^2 + 4x + 55$ $\Rightarrow 4x^2 + 10x - 6 = 0$ $a = 4; b = 10; c = -6$ $\Delta = b^2 - 4ac \Leftrightarrow \Delta = 10^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-6) = 196$ $\sqrt{\Delta} = \sqrt{196} = 14$ $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_1 = \frac{-10 + 14}{2 \cdot 4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_1 = \frac{-10 - 14}{2 \cdot 4} = \frac{-24}{8} = -3 \in \mathbb{R}$

FIȘĂ _ REZOLVAREA COMPLETĂ A DIFERITELOR TIPURI DE EXERCITII

Clasa a IX-a

Matematică_M2 sau actual M_tehnologic

Prof. Mestecan Cornelia

Exercițiul 1/Sub. I/varianta nr. 89/ antrenament bac 2009/M21. Să se calculeze suma $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^6$.

Extragem informațiile date:

- a. **Observăm** că este vorba despre o progresie geometrică $\Rightarrow$ termenii șirului se află prin înmulțire repetată cu un același număr fix numit **rație**, notată cu

$$q = 2 \text{ și primul termen este } b_1 = 1$$

$$(b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 2^2 \Rightarrow q = 2)$$

- b. **Observăm** că sunt 7 termeni și $b_7 = 2^6$

Se cere rația progresiei**Rezolvare:**

Metoda I	Metoda II
Facem calcule! $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^6 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$ $= 127$	Folosim relații/formule cunoscute! Știm că sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice, deci $S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, q \neq 1$ Am observat că sunt 7 termeni, $q = 2$ și $b_1 = 1$ $S_7 = b_1 + b_2 + \dots + b_7 = b_1 \frac{q^7 - 1}{q - 1} = 1 \cdot \frac{2^7 - 1}{2 - 1}$ $S_7 = 128 - 1 = 127$