

FIȘĂ _ REZOLVAREA COMPLETĂ A DIFERITELOR TIPURI DE EXERCII

Clasa a IX-a _ **Trigonometrie**

Matematică (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat)

Prof. Mestecan Cornelia

Teorie - recapitulare

Grade sexagesimale	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Radiani	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	/	0	/	0
$ctgx = \frac{\cos x}{\sin x}$	/	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	/	0	/

Formule trigonometrice

1. Formula fundamentală a trigonometriei : $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

2. Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ au loc egalitățile :

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

Fie $\triangle ABC$ oarecare

cu laturile $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ și

înălțimea h coborâtă din vârful A pe latura a ,

A, B, C – măsurile unghiurilor triunghiului,

R – raza cercului circumscris triunghiului,

r – raza cercului înscris triunghiului.

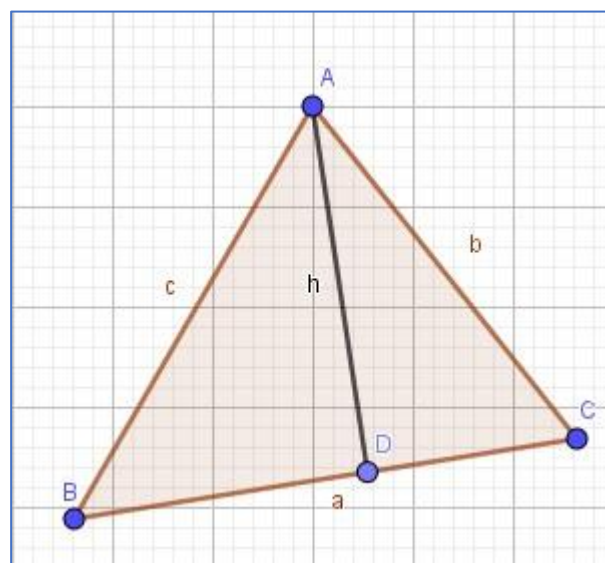
-teorema sinusurilor:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

-teorema cosinusului:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

de unde putem afla și $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$



FIȘĂ _ REZOLVAREA COMPLETĂ A DIFERITELOR TIPURI DE EXERCIȚII

Clasa a IX-a _ **Trigonometrie**

Matematică (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat)

Prof. Mestecan Cornelia

-aria triunghiului:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ unde } p = \frac{a+b+c}{2};$$

$$S = \frac{ac \sin B}{2} = \frac{ab \sin C}{2} = \frac{bc \sin A}{2}$$

$$\text{Sau } S = \frac{\text{baza} \cdot \text{inaltimea}}{2} \text{ sau } S = \frac{abc}{4R} = rp$$

(sunt formule alternative care se aplică în cazul dat de problemă)

-dacă $\triangle ABC$ este echilateral $a = b = c$ deci $p = a + b + c = 3a$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Exerciții rezolvate:

Exercițiul 6/SubI/varianta 3/Matematică M_mate-info/2013

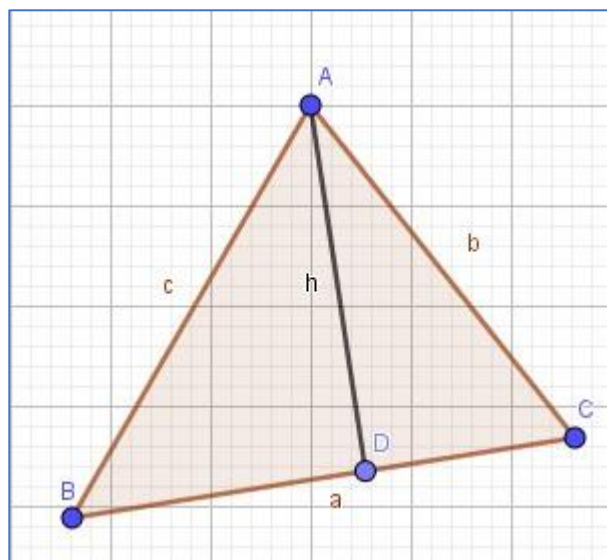
6. Calculați sinusul unghiului A al triunghiului ABC în care $AB = 6, BC = 10, \sin C = \frac{3}{5}$.

Extragem datele:

a) Știm că în triunghiul ABC avem $AB = 6, BC = 10, \sin C = \frac{3}{5}$

b) Se cere: $\sin A$

Rezolvare:



E bine să ne facem un desen ca să vedem exact ce se dă și ce se cere!

Observăm că

$c = 6, a = 10, \sin C = \frac{3}{5}$, deci putem folosi

teorema sinusurilor:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Leftrightarrow \frac{10}{\sin A} = \frac{6}{\frac{3}{5}}$$

$$\Rightarrow \sin A = \frac{\cancel{10} \cdot \frac{3}{\cancel{5}}}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

FIȘĂ _ REZOLVAREA COMPLETĂ A DIFERITELOR TIPURI DE EXERCIȚIIClasa a IX-a _ **Trigonometrie**

Matematică (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat)

Prof. Mestecan Cornelia

Exercițiul 6/SubI/varianta 3/ Matematică M_șt-nat /2013

6. Determinați $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ știind că $\frac{3 \sin x - 2 \cos x}{\cos x} = 1$

Extragem datele:

a) Știm că $\frac{3 \sin x - 2 \cos x}{\cos x} = 1$

b) Se cere: $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Rezolvare:

Exercițiul 6/SubI/varianta 3/ Matematică M_tehnologic/2013

6. Calculați $\cos B$, știind că $\sin B = \frac{5}{13}$ și unghiul B este ascuțit.

Extragem datele:

1. Știm că $\sin B = \frac{5}{13}$ și că unghiul B este ascuțit adică $\sin B > 0, \cos B > 0$

2. Se cere: $\cos B$

Rezolvare:

Atunci când știm sinusul unui unghi și se cere cosinusul său, sau invers, se folosește formula fundamentală a trigonometriei

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 B + \cos^2 B = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{13}\right)^2 + \cos^2 B = 1 \Rightarrow \cos^2 B = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$$

$$\Rightarrow \cos B = \frac{12}{13} \text{ sau } \Rightarrow \cos B = -\frac{12}{13}$$

dar $\cos B > 0$ rezultă că soluția este $\cos B = \frac{12}{13}$.

Exercițiul 6/SubI/varianta 2/ Matematică M_tehnologic/2013

6. Calculați $\cos 45^\circ + \cos 135^\circ$.

Știm că $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Observăm că $135^\circ = 90^\circ + 45^\circ$ deci pentru a calcula $\cos 135^\circ$ avem nevoie de o formulă și anume de

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

FIȘĂ _ REZOLVAREA COMPLETĂ A DIFERITELOR TIPURI DE EXERCIȚII

Clasa a IX-a _ **Trigonometrie**

Matematică (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat)

Prof. Mestecan Cornelia

Înlocuim cu datele noastre

$$\cos 135^\circ = \cos(90^\circ + 45^\circ) = \cos 90^\circ \cos 45^\circ - \sin 90^\circ \sin 45^\circ$$

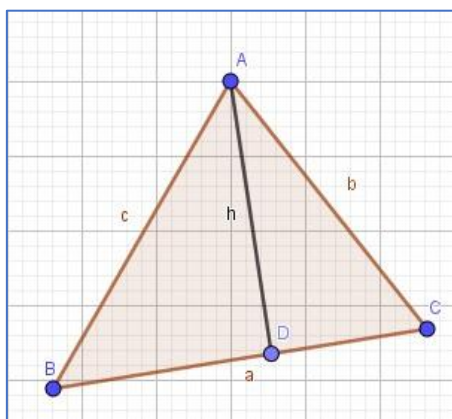
$$\text{Știm că } \sin 90^\circ = 1, \cos 90^\circ = 0 \text{ iar } \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45^\circ$$

$$\text{Deci } \cos 135^\circ = 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Rezultă că } \cos 45^\circ + \cos 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

Exercițiul 6/SubI/varianta 9/ Matematică M_șt-nat /2013

3. Calculați cosinusul unghiului A al triunghiului ABC în care $AB = 5, AC = 6, BC = 7$.



E bine să ne facem un desen ca să vedem exact ce se dă și ce se cere!

Observăm că

$$AB = c = 5, AC = b = 6 \text{ și } BC = a = 7$$

Se cere $\cos A$

Folosim teorema cosinusului pentru latura a

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Metoda I

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos A = \frac{6^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 6 \cdot 5} \Rightarrow \cos A = \frac{36 + 25 - 49}{2 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{12}{2 \cdot 6 \cdot 5}$$

Deci

$$\Rightarrow \cos A = \frac{1}{5}$$

Metoda II

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow 7^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cos A$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cos A = 6^2 + 5^2 - 7^2 \Rightarrow 60 \cos A = 12$$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$$

Exercițiul 6/SubI/varianta 5/ Matematică M_mate-info/2014

$$6. \text{ Știind că } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ și } \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ calculați } \sin 2x.$$

FIȘĂ _ REZOLVAREA COMPLETĂ A DIFERITELOR TIPURI DE EXERCII

Clasa a IX-a _ **Trigonometrie**

Matematică (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat)

Prof. Mestecan Cornelia

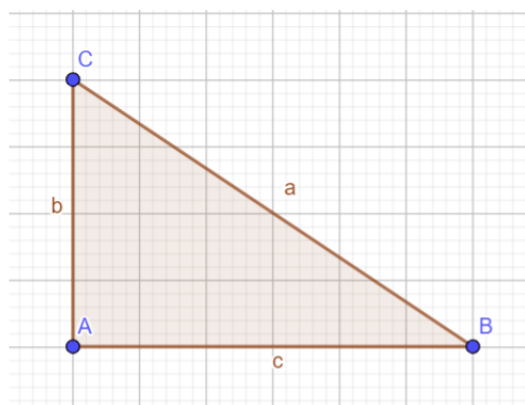
Știm că $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, înseamnă că $x = 30^\circ$ deci $\sin x = \frac{1}{2}$

Folosim $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \Rightarrow \sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$$\text{Deci } \sin 2x = \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Exercițiul 6/SubI/varianta 5/ Matematică M_șt-nat/2014

6. Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A . Arătați că $\sin B \cdot \cos C + \sin C \cdot \cos B = 1$



E bine să ne facem un desen ca să vedem exact ce se dă și ce se cere!

$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}, \cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}$$

$$\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}, \cos C = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$$

triunghiul ABC este dreptunghic în $A \xRightarrow{\text{t. Pitagora}} b^2 + c^2 = a^2$ sau $AB^2 + AC^2 = BC^2$
Înlocuim în relație

Metoda I.

$$\sin B \cdot \cos C + \sin C \cdot \cos B = 1 \Leftrightarrow \frac{b}{a} \cdot \frac{b}{a} + \frac{c}{a} \cdot \frac{c}{a} = 1 \Leftrightarrow \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{a^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow 1 = 1, (A)$$

Metoda II.

$$\sin B \cdot \cos C + \sin C \cdot \cos B = 1 \Leftrightarrow \frac{AC}{BC} \cdot \frac{AC}{BC} + \frac{AB}{BC} \cdot \frac{AB}{BC} = 1 \Leftrightarrow \frac{AC^2}{BC^2} + \frac{AB^2}{BC^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{AC^2 + AB^2}{BC^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{BC^2}{BC^2} = 1 \Leftrightarrow 1 = 1, (A)$$

Exercițiul 6/SubI/varianta 8/ Matematică M_șt-nat/2016

6. Determinați aria triunghiului ABC , știind că $AB = 6$, $AC = 4$, $A = \frac{\pi}{6}$

FIȘĂ _ REZOLVAREA COMPLETĂ A DIFERITELOR TIPURI DE EXERCIȚII

Clasa a IX-a _ **Trigonometrie**

Matematică (M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat)

Prof. Mestecan Cornelia

Știm că $AB = c = 6, AC = b = 4, A = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \sin A = \frac{1}{2}$

Și că aria se calculează cu formula $S = \frac{bc \sin A}{2}$, înlocuim datele

$$S = \frac{4 \cdot 6 \sin \frac{\pi}{6}}{2} \Rightarrow S = 2 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow S = 6$$

Exercițiul 6/SubI/varianta 2/ Matematică M_șt-nat/2016

6. Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC , în care

$$AB = \sqrt{2}, C = \frac{\pi}{4}$$

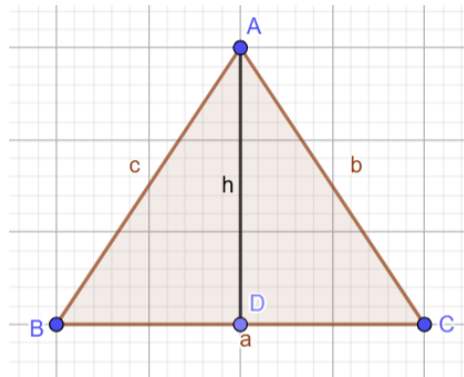
Folosim teorema sinusurilor $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

Știm $AB = c = \sqrt{2}, C = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin C = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, înlocuim

$$\frac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2R \Leftrightarrow \frac{2}{2} = 2R \Leftrightarrow 1 = 2R \Rightarrow R = \frac{1}{2}$$

Exercițiul 6/SubI/varianta 1/ Matematică M_mate-info/2016

6. Se consideră tringhiul ABC , cu $AB = 10, AC = 10, BC = 12$. Arătați că $\sin B = \frac{4}{5}$.



OBS. Facem desenul, acesta este util și pentru cel care rezolvă și pentru corector!!!!

Știm că : $AB = 10, AC = 10, BC = 12$ deci triunghiul ABC este isoscel cu vârful în A . Atunci cum $AD \perp BC$ rezultă că AD este înălțime dar și mediană , prin urmare

$$BD = DC = \frac{12}{2} = 6.$$

Triunghiul ABD este dreptunghic în D , atunci $\sin B = \frac{AD}{AB}$

Aflăm AD din teorema lui Pitagora în $\triangle ABD$

$$BD^2 + AD^2 = AB^2$$

Înlocuim datele : $6^2 + AD^2 = 10^2 \Rightarrow AD^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow AD = 8$

$$\text{Calculăm } \sin B = \frac{AD}{AB} = \frac{8}{10} \Rightarrow \sin B = \frac{4}{5}, (A)$$