

FIȘĂ _ REZOLVAREA COMPLETĂ A DIFERITELOR TIPURI DE EXERCITII

Clasa a IX-a _ VECTORI

Matematică (M1, M2, M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat)

Prof. Mestecan Cornelia

Teorie_recapitulare

1. Vectorii $\vec{i}$ de pe axa OX și $\vec{j}$ de pe axa OY , de lungime 1, cu proprietatea de a fi perpendiculari, se numesc **VERSORI**
2. Reperul xOy este format din cele două axe de coordonate Ox și Oy , O fiind originea comună, iar **reperul cartezian este $(O; \vec{i}; \vec{j})$**
3. Vectorul $\overrightarrow{OM}$, unde $M(x_M; y_M)$ este un punct oarecare în plan, se numește **vector de poziție al punctului M** .
4. Vectorul $\overrightarrow{OM}$ se descompune după direcțiile date de versorii $\vec{i}$ și $\vec{j}$ astfel :

$$\overrightarrow{OM} = x_M \vec{i} + y_M \vec{j}, \text{ numerele reale } x_M, y_M \text{ se numesc coordonatele vectorului } \overrightarrow{OM}$$

Sau spunem că $\overrightarrow{OM} = x_M \vec{i} + y_M \vec{j}$ este descompunerea lui $\overrightarrow{OM}$ în funcție de versorii $\vec{i}$ și $\vec{j}$.

5. Modulul vectorului $\overrightarrow{OM}$ este $|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{(x_M)^2 + (y_M)^2}$

6. Deci un vector oarecare $\vec{v}$ se poate descompune după versorii $\vec{i}$ și $\vec{j}$

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}, \text{ } x \text{ și } y \text{ se numesc coordonatele vectorului, iar } |\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ este modulul vectorului } \vec{v}.$$

7. Fie vectorii $\vec{v}_1(x_1, y_1), \vec{v}_2(x_2, y_2)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ atunci $\alpha \vec{v}_1(\alpha x_1, \alpha y_1)$ și

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \text{ sau } \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j}$$

$$\text{Produsul scalar: } \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cdot \cos \alpha \text{ unde } \alpha = \angle(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$$

$$\vec{v}_1 \text{ colinar cu } \vec{v}_2 \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} \text{ a.f. } \vec{v}_1 = a \vec{v}_2 \text{ sau } \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = a$$

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \text{ perpendiculari} \Leftrightarrow \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0 \left(\alpha = \angle(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = 90^\circ, \cos 90^\circ = 0 \right)$$

8. Fie punctele $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ în sistemul de axe xOy , atunci $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$

$$\text{sau } \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$$

$$\text{iar } |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = d(A, B) = l([AB])$$

FIȘĂ _ REZOLVAREA COMPLETĂ A DIFERITELOR TIPURI DE EXERCIIClasa a IX-a _ **VECTORI**

Matematică (M1, M2, M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat)

Prof. Mestecan Cornelia

Exercițiul 5/Sub I/ varianta 6/2010_M2 (actual M_tehnologic și M_științele naturii)

5. În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(2,0), B(1,-1), O(0,0)$. Determinați coordonatele punctului C pentru care $\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

Extragem informațiile date:

- a. **Știm** că avem cele trei puncte în sistemul de axe xOy : $A(2,0), B(1,-1), O(0,0)$
- b. **Știm** că $\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

Se cer coordonatele punctului C !**Rezolvare:**Punctul C este în sistemul de axe xOy deci $C(x_c, y_c)$

Scriem vectorii implicați în relația dată:

$$\overrightarrow{OA} = x_A \vec{i} + y_A \vec{j} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + 0\vec{j} = 2\vec{i}$$

$$\overrightarrow{OB} = x_B \vec{i} + y_B \vec{j} \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} = 1\vec{i} + (-1)\vec{j} = \vec{i} - \vec{j}$$

$$\overrightarrow{OC} = x_C \vec{i} + y_C \vec{j}$$

Înlocuim în relație și facem calcule:

$$\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow x_C \vec{i} + y_C \vec{j} = 2(2\vec{i}) + \vec{i} - \vec{j} = 5\vec{i} - \vec{j}$$

Soluție: $C(5, -1)$ **Exercițiul 5/Sub I/ varianta 3/2013_ M_mate-info**

5. În dreptunghiul $ABCD$, cu $AB = 8, BC = 6$, se consideră vectorul $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AD}$, unde $\{O\} = AC \cap BD$. Calculați lungimea vectorului $\vec{v}$.

Extragem informațiile date:

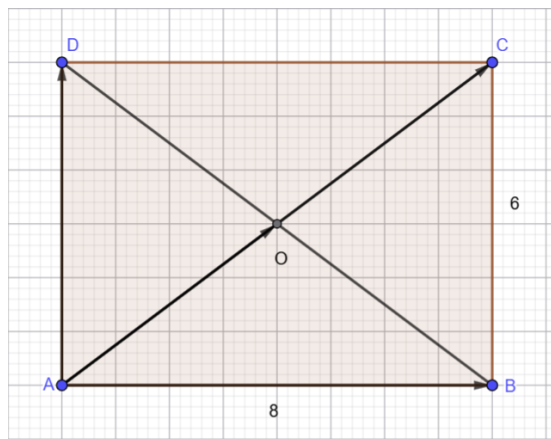
- a. **Știm** că $ABCD$ este dreptunghi și $AB = 8, BC = 6$
- b. **Știm** că $\{O\} = AC \cap BD$

Se cere lungimea vectorului $\vec{v}$ **Rezolvare:**

FIȘĂ _ REZOLVAREA COMPLETĂ A DIFERITELOR TIPURI DE EXERCIIClasa a IX-a _ **VECTORI**

Matematică (M1, M2, M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat)

Prof. Mestecan Cornelia



E bine să ne facem un desen ca să vedem exact ce se dă și ce se cere!

$$\{O\} = AC \cap BD \text{ prin urmare } AO = OD = \frac{AC}{2}$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AO}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AD} \Rightarrow \vec{v} = 3\overrightarrow{AO}$$

În triunghiul ABC dreptunghic în B aplicăm teorema lui Pitagora și obținem:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Leftrightarrow AC^2 = 8^2 + 6^2 = 100$$

$$AC = 10 \Rightarrow AO = 5$$

Rezultă că lungimea vectorului $\vec{v}$ este 15.

Exercițiul 5/Sub I/ varianta 2/2013_ M_mate-info

5. Determinați numărul real a pentru care vectorii $\vec{u} = \vec{i} + 4\vec{j}$ și $\vec{v} = 2\vec{i} + (a+1)\vec{j}$ sunt coliniari.

Extragem informațiile date:

a. **Știm** că $\vec{u} = \vec{i} + 4\vec{j}$ și $\vec{v} = 2\vec{i} + (a+1)\vec{j}$ sunt coliniari

Se cere numărul real a

Rezolvare:

Cunoaștem că $\vec{v}_1$ colinar cu $\vec{v}_2 \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}$ a.î. $\vec{v}_1 = a\vec{v}_2$ sau $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = a$

Prin urmare $\vec{u}$ colinar cu $\vec{v} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{4}{a+1} \Rightarrow a+1 = 8 \Rightarrow a = 7$.

Exercițiul 5/Sub I/ model/2015_ M_șt-nat

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3), B(-2,1), C(-2,5)$. Determinați lungimea vectorului $\overrightarrow{AM}$, știind că M este mijlocul segmentului BC .

Extragem informațiile date:

a. **Știm** punctele $A(2,3), B(-2,1), C(-2,5)$ și că M este mijlocul segmentului BC

Se cere lungimea vectorului $\overrightarrow{AM}$

FIȘĂ _ REZOLVAREA COMPLETĂ A DIFERITELOR TIPURI DE EXERCII

Clasa a IX-a _ VECTORI

Matematică (M1, M2, M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat)

Prof. Mestecan Cornelia

Rezolvare:

$M(x_M, y_M)$ este mijlocul segmentului BC , coordonatele lui M se calculează cu formulele:

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} \Rightarrow x_M = \frac{-2 + (-2)}{2} = -2, \quad y_M = \frac{y_B + y_C}{2} \Rightarrow y_M = \frac{1 + 5}{2} = 3 \text{ deci } M(-2, 3)$$

Met. I. Calculăm coordonatele vectorului $\overrightarrow{AM}$:

$$\overrightarrow{AM} = (x_M - x_A)\vec{i} + (y_M - y_A)\vec{j} \quad \text{sau} \quad \overrightarrow{AM}(x_M - x_A; y_M - y_A)$$

$$\text{Adică } \overrightarrow{AM} = (-2 - 2)\vec{i} + (3 - 3)\vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (-4)\vec{i} + 0\vec{j} \quad \text{sau} \quad \overrightarrow{AM}(-2 - 2; 3 - 3) \Rightarrow \overrightarrow{AM}(-4; 0)$$

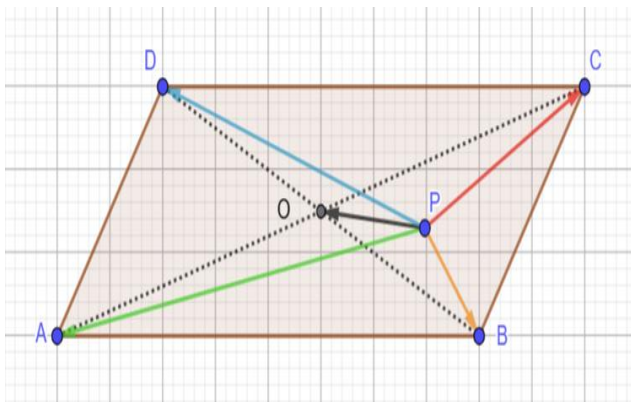
$$\text{De unde } |\overrightarrow{AM}| = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow |\overrightarrow{AM}| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = 4.$$

$$\text{Met. II. Știm că } |\overrightarrow{AM}| = d(A, M) = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2}$$

$$\text{Obținem } |\overrightarrow{AM}| = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (3 - 3)^2} = \sqrt{(-4)^2} = 4$$

Exercițiul 5/Sub I/ varianta 6/2020 _ M_șt-nat

5. Se consideră un punct P în planul paralelogramului $ABCD$. Arătați că $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}$



E bine să ne facem un desen ca să vedem exact ce se dă și ce se cere și cum putem rezolva !

Extragem informațiile date:

Știm că $ABCD$ este paralelogram, asta înseamnă că diagonalele se înjumătățesc și suma a doi vectori cu aceeași origine, este diagonală paralelogramului format, cu aceeași origine ca și vectorii însumați, de ex. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AO}$

Se cere să arătăm că $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}$

Rezolvare:

Aplicăm regula adunării vectorilor cu aceeași origine și obținem

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{PO} \\ \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{PO} \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}, (A)$$

FIȘĂ _ REZOLVAREA COMPLETĂ A DIFERITELOR TIPURI DE EXERCITII

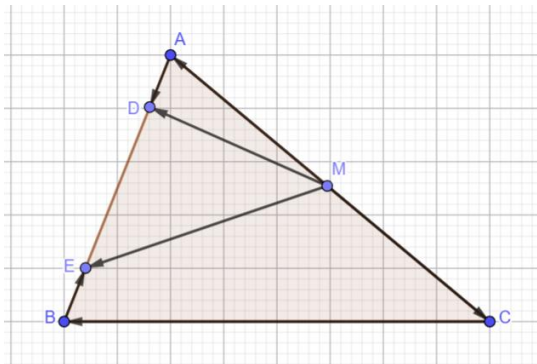
Clasa a IX-a _ VECTORI

Matematică (M1, M2, M_tehnologic, M_mate-info, M_st nat)

Prof. Mestecan Cornelia

Exercițiul 5/Sub I/ simulare națională/martie 2023_ M_mate-info

5. În triunghiul ABC , punctul M este mijlocul laturii AC , iar punctele D și E aparțin segmentului AB , astfel încât $AD = BE$. Arătați că $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{CB}$.



E bine să ne facem un desen ca să vedem exact ce se dă și ce se cere și cum putem rezolva !

Extragem informațiile date:

- Știm** că ABC este triunghi, punctele D și E aparțin segmentului AB , astfel încât $AD = BE$, iar punctul M este mijlocul laturii AC , adică $MA = MC$
- Știm** că suma a doi sau mai mulți vectori se poate realiza și astfel: se desenează primul vector, al doilea se desenează așezându-l cu originea în vârful primului, și așa mai departe. Suma este vectorul cu originea în originea primului vector și vârful coincide cu vârful ultimului vector.

Se cere să arătăm că $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{CB}$

Rezolvare:

Scriem vectorii ceruți $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE}$

Observăm că $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{BE}$ adică $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BE}$ sunt vectori opuși, la fel și vectorii $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE} \\ \text{Calculăm suma cerută} &= \underbrace{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{CB} + \underbrace{\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE}}_{\vec{0}} \Rightarrow \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{CB} \end{aligned}$$