

# FIȘĂ \_ REZOLVAREA COMPLETĂ A DIFERITELOR TIPURI DE EXERCII

Clasa a IX-a \_ **Trigonometrie**

Matematică (M\_tehnologic, M\_mate-info, M\_st nat)

Prof. Mestecan Cornelia

## Teorie - recapitulare

| Grade sexagesimale             | 0° | 30°                  | 45°                  | 60°                  | 90°             | 180°  | 270°             | 360°   |
|--------------------------------|----|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|-------|------------------|--------|
| Radiani                        | 0  | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
| $\sin x$                       | 0  | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1               | 0     | -1               | 0      |
| $\cos x$                       | 1  | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0               | -1    | 0                | 1      |
| $tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$  | 0  | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | /               | 0     | /                | 0      |
| $ctgx = \frac{\cos x}{\sin x}$ | /  | $\sqrt{3}$           | 1                    | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0               | /     | 0                | /      |

## Formule trigonometrice

**1. Formula fundamentală a trigonometriei :**  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

**2. Pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$  au loc egalitățile :**

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

Fie  $\Delta ABC$  oarecare  
cu laturile  $BC=a$ ,  $AC=b$ ,  $AB=c$  și  
înălțimea  $h$  coborâtă din vârful  $A$  pe latura  $a$ ,  
 $A, B, C$  - măsurile unghiurilor triunghiului,  
 $R$  - raza cercului circumscris triunghiului,  
 $r$  - raza cercului înscris triunghiului.

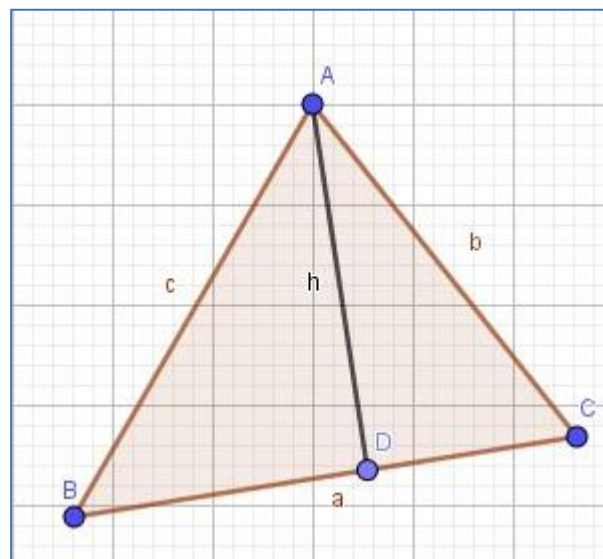
**-teorema sinusurilor:**

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

**-teorema cosinusului:**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

de unde putem afla și  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$



## FIȘĂ \_ REZOLVAREA COMPLETĂ A DIFERITELOR TIPURI DE EXERCII

Clasa a IX-a \_ **Trigonometrie**

Matematică (M\_tehnologic, M\_mate-info, M\_st nat)

Prof. Mestecan Cornelia

**-aria triunghiului:**

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ unde } p = \frac{a+b+c}{2};$$

$$S = \frac{ac \sin B}{2} = \frac{ab \sin C}{2} = \frac{bc \sin A}{2}$$

$$\text{Sau } S = \frac{\text{baza} \cdot \text{inaltimea}}{2} \text{ sau } S = \frac{abc}{4R} = rp$$

(sunt formule alternative care se aplică în cazul dat de problemă)

-dacă  $\triangle ABC$  este echilateral  $a = b = c$  deci  $p = a + b + c = 3a$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

**Exerciții rezolvate:**

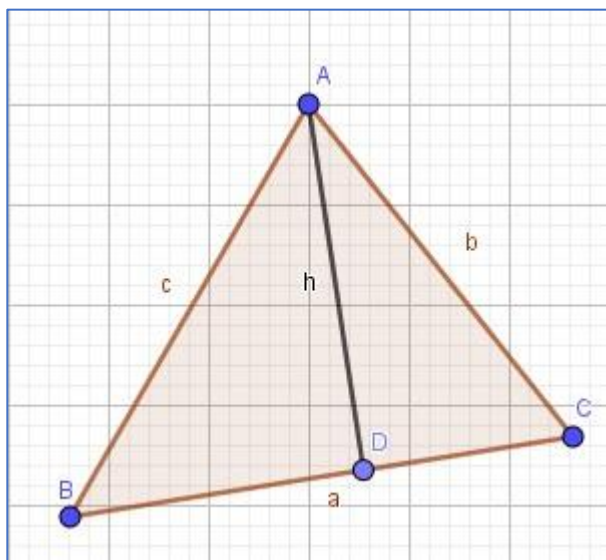
### Exercițiul 6/SubI/varianta 3/Matematică M\_mate-info/2013

6. Calculați sinusul unghiului  $A$  al triunghiului  $ABC$  în care  $AB = 6, BC = 10, \sin C = \frac{3}{5}$ .

Extragem datele:

- a) Știm că în triunghiul  $ABC$  avem  $AB = 6, BC = 10, \sin C = \frac{3}{5}$   
b) Se cere:  $\sin A$

Rezolvare:



E bine să ne facem un desen ca să vedem exact ce se dă și ce se cere!  
Observăm că

$$c = 6, a = 10, \sin C = \frac{3}{5}, \text{ deci putem folosi}$$

teorema sinusurilor:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Leftrightarrow \frac{10}{\sin A} = \frac{6}{\frac{3}{5}}$$

$$\Rightarrow \sin A = \frac{\cancel{10} \cdot \frac{3}{\cancel{5}}}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

**FIȘĂ \_ REZOLVAREA COMPLETĂ A DIFERITELOR TIPURI DE EXERCII**Clasa a IX-a \_ **Trigonometrie**

Matematică (M\_tehnologic, M\_mate-info, M\_st nat)

Prof. Mestecan Cornelia

**Exercițiul 6/SubI/varianta 3/ Matematică M\_șt-nat /2013**

6. Determinați  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  știind că  $\frac{3 \sin x - 2 \cos x}{\cos x} = 1$

Extragem datele:

a) Știm că  $\frac{3 \sin x - 2 \cos x}{\cos x} = 1$

b) Se cere:  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{3 \sin x - 2 \cos x}{\cos x} = 1 \Leftrightarrow 3 \sin x - 2 \cos x = \cos x \Rightarrow 3 \sin x = 3 \cos x$$

Rezolvare:

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = \cos x \\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

**Exercițiul 6/SubI/varianta 3/ Matematică M\_tehnologic/2013**

6. Calculați  $\cos B$ , știind că  $\sin B = \frac{5}{13}$  și unghiul  $B$  este ascuțit.

Extragem datele:

1. Știm că  $\sin B = \frac{5}{13}$  și că unghiul  $B$  este ascuțit adică  $\sin B > 0, \cos B > 0$

2. Se cere:  $\cos B$

Rezolvare:

Atunci când știm sinusul unui unghi și se cere cosinusul său, sau invers, se folosește formula fundamentală a trigonometriei

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 B + \cos^2 B = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{13}\right)^2 + \cos^2 B = 1 \Rightarrow \cos^2 B = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$$

$$\Rightarrow \cos B = \frac{12}{13} \text{ sau } \Rightarrow \cos B = -\frac{12}{13}$$

dar  $\cos B > 0$  rezultă că soluția este  $\cos B = \frac{12}{13}$ .

**Exercițiul 6/SubI/varianta 2/ Matematică M\_tehnologic/2013**

6. Calculați  $\cos 45^\circ + \cos 135^\circ$ .

Știm că  $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Observăm că  $135^\circ = 90^\circ + 45^\circ$  deci pentru a calcula  $\cos 135^\circ$  avem nevoie de o formulă și anume de

## FIȘĂ \_ REZOLVAREA COMPLETĂ A DIFERITELOR TIPURI DE EXERCII

Clasa a IX-a \_ **Trigonometrie**

Matematică (M\_tehnologic, M\_mate-info, M\_st nat)

Prof. Mestecan Cornelia

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

înlocuim cu datele noastre

$$\cos 135^\circ = \cos(90^\circ + 45^\circ) = \cos 90^\circ \cos 45^\circ - \sin 90^\circ \sin 45^\circ$$

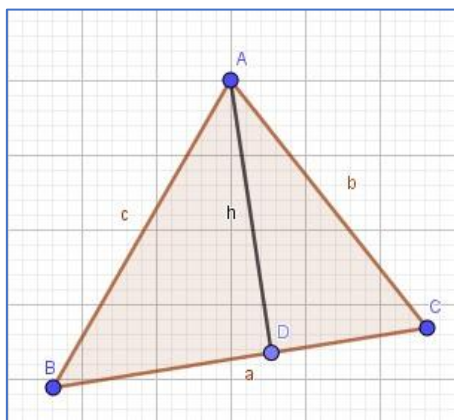
$$\text{Știm că } \sin 90^\circ = 1, \cos 90^\circ = 0 \text{ iar } \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45^\circ$$

$$\text{Deci } \cos 135^\circ = 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Rezultă că } \cos 45^\circ + \cos 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

### Exercițiul 6/SubI/varianta 9/ Matematică M\_șt-nat /2013

3. Calculați cosinusul unghiului A al triunghiului ABC în care  $AB = 5, AC = 6, BC = 7$ .



E bine să ne facem un desen ca să vedem exact ce se dă și ce se cere!

Observăm că

$$AB = c = 5, AC = b = 6 \text{ și } BC = a = 7$$

Se cere  $\cos A$

Folosim teorema cosinusului pentru latura  $a$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

#### Metoda I

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\text{Deci } \cos A = \frac{6^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 6 \cdot 5} \Rightarrow \cos A = \frac{36 + 25 - 49}{2 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{12}{2 \cdot 6 \cdot 5}$$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{1}{5}$$

#### Metoda II

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow 7^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cos A$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cos A = 6^2 + 5^2 - 7^2 \Rightarrow 60 \cos A = 12$$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$$

### Exercițiul 6/SubI/varianta 5/ Matematică M\_mate-info/2014

6. Știind că  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  și  $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , calculați  $\sin 2x$ .

## FIȘĂ \_ REZOLVAREA COMPLETĂ A DIFERITELOR TIPURI DE EXERCII

Clasa a IX-a \_ **Trigonometrie**

Matematică (M\_tehnologic, M\_mate-info, M\_st nat)

Prof. Mestecan Cornelia

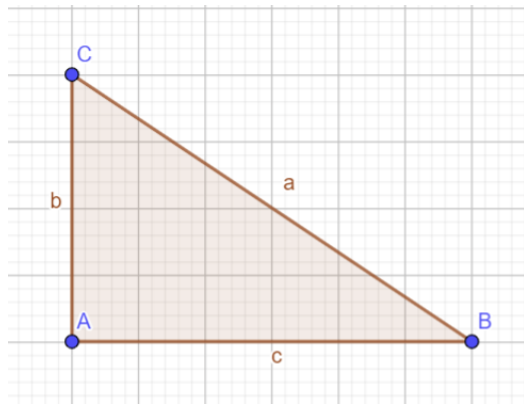
Știm că  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  și  $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , înseamnă că  $x = 30^\circ$  deci  $\sin x = \frac{1}{2}$

Folosim  $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \Rightarrow \sin 2x = 2 \sin x \cos x$

Deci  $\sin 2x = \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

### Exercițiul 6/SubI/varianta 5/ Matematică M\_șt-nat/2014

6. Se consideră triunghiul  $ABC$  dreptunghic în  $A$ . Arătați că  $\sin B \cdot \cos C + \sin C \cdot \cos B = 1$



E bine să ne facem un desen ca să vedem exact ce se dă și ce se cere!

$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}, \cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}$$

$$\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}, \cos C = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$$

triunghiul  $ABC$  este dreptunghic în  $A \xRightarrow{t. Pitagora} b^2 + c^2 = a^2$  sau  $AB^2 + AC^2 = BC^2$   
Înlocuim în relație

**Metoda I.**

$$\sin B \cdot \cos C + \sin C \cdot \cos B = 1 \Leftrightarrow \frac{b}{a} \cdot \frac{b}{a} + \frac{c}{a} \cdot \frac{c}{a} = 1 \Leftrightarrow \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{a^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow 1 = 1, (A)$$

**Metoda II.**

$$\sin B \cdot \cos C + \sin C \cdot \cos B = 1 \Leftrightarrow \frac{AC}{BC} \cdot \frac{AC}{BC} + \frac{AB}{BC} \cdot \frac{AB}{BC} = 1 \Leftrightarrow \frac{AC^2}{BC^2} + \frac{AB^2}{BC^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{AC^2 + AB^2}{BC^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{BC^2}{BC^2} = 1 \Leftrightarrow 1 = 1, (A)$$

### Exercițiul 6/SubI/varianta 8/ Matematică M\_șt-nat/2016

6. Determinați aria triunghiului  $ABC$ , știind că  $AB = 6, AC = 4, A = \frac{\pi}{6}$

Știm că  $AB = c = 6, AC = b = 4, A = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \sin A = \frac{1}{2}$

**FIȘĂ \_ REZOLVAREA COMPLETĂ A DIFERITELOR TIPURI DE EXERCII**Clasa a IX-a \_ **Trigonometrie**

Matematică (M\_tehnologic, M\_mate-info, M\_st nat)

Prof. Mestecan Cornelia

Și că aria se calculează cu formula  $S = \frac{bc \sin A}{2}$ , înlocuim datele

$$S = \frac{4 \cdot 6 \sin \frac{\pi}{6}}{2} \Rightarrow S = 2 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow S = 6$$

**Exercițiul 6/SubI/varianta 2/ Matematică M\_șt-nat/2016**

6. Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului  $ABC$ , în care

$$AB = \sqrt{2}, C = \frac{\pi}{4}$$

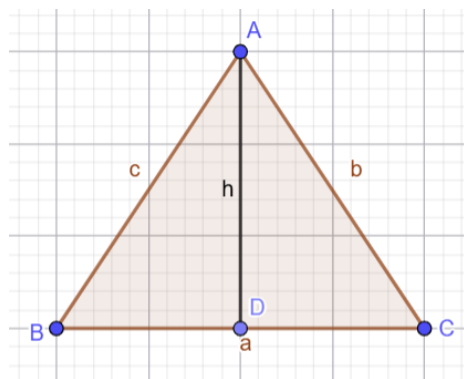
Folosim teorema sinusurilor  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

Știm  $AB = c = \sqrt{2}, C = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin C = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , înlocuim

$$\frac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2R \Leftrightarrow \frac{2}{2} = 2R \Leftrightarrow 1 = 2R \Rightarrow R = \frac{1}{2}$$

**Exercițiul 6/SubI/varianta 1/ Matematică M\_mate-info/2016**

6. Se consideră tringhiul  $ABC$ , cu  $AB = 10, AC = 10, BC = 12$ . Arătați că  $\sin B = \frac{4}{5}$ .



*OBS. Facem desenul, acesta este util și pentru cel care rezolvă și pentru corector!!!!*

Știm că :  $AB = 10, AC = 10, BC = 12$  deci tringhiul  $ABC$  este isoscel cu vârful în  $A$ . Atunci cum  $AD \perp BC$  rezultă că  $AD$  este înălțime dar și mediană , prin urmare

$$BD = DC = \frac{12}{2} = 6.$$

Tringhiul  $ABD$  este dreptunghic în  $D$  , atunci  $\sin B = \frac{AD}{AB}$

Aflăm  $AD$  din teorema lui Pitagora în  $\triangle ABD$

$$BD^2 + AD^2 = AB^2$$

Înlocuim datele :  $6^2 + AD^2 = 10^2 \Rightarrow AD^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow AD = 8$

$$\text{Calculăm } \sin B = \frac{AD}{AB} = \frac{8}{10} \Rightarrow \sin B = \frac{4}{5}, (A)$$